数理 (24) 略解 (v-4.0)

数理 1

[1] $l(\beta) = -\frac{n}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta x_i)^2$

[2] 最尤推定量は $\hat{\beta}_{ML} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i Y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ で, $E[\hat{\beta}_{ML}] = \beta$ となる。

[3] フィッシャー情報量は $I_n(\beta) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ 。クラメール・ラオの下限は $\frac{1}{I_n(\beta)} = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ 。

[4] $E[\tilde{\beta}] = \beta$, $V[\tilde{\beta}] = \frac{n\sigma^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$

[5] 検出力につき $P(\hat{\beta}_{ML} \geq c_{ML} \mid \beta = \beta_1) \geq P(\tilde{\beta} \geq \tilde{c} \mid \beta = \beta_1)$ が成り立つ。

数理２

[1]　累積分布関数は

$$F(r)=\begin{cases} 0 & (r<0) \\ r^2/\theta^2 & (0\le r\le\theta) \\ 1 & (r>\theta) \end{cases}$$

確率密度関数は

$$f(r)=\begin{cases} 2r/\theta^2 & (0\le r\le\theta) \\ 0 & \text{（その他）} \end{cases}$$

[2]　$E[R]=\dfrac{2}{3}\theta$，$V[R]=\dfrac{1}{18}\theta^2$

[3]　累積分布関数は $G(r)=\dfrac{r^{2n}}{\theta^{2n}}$，確率密度関数は $g(r)=\dfrac{2nr^{2n-1}}{\theta^{2n}}$。

[4]　最尤推定量は $R_1,...,R_n$ の最大値 $\hat{\theta}_{ML}=R_{(n)}$。

[5]　$a=(2n+1)/(2n)$，$b=0$ で，$V[\hat{\theta}_U]=\dfrac{\theta^2}{4n(n+1)}$。

数理３

[1]　S_n は二項分布 $B(n, \theta)$ に従い，$E[S_n] = n\theta,\ \ V[S_n] = n\theta(1-\theta)$。

[2]　θ の尤度関数は $L(\theta) \propto \theta^{S_n}(1-\theta)^{n-S_n}$ と S_n のみの関数となるので，S_n は θ の十分統計量。θ の最尤推定量は $\hat{\theta}_{ML} = S_n / n$。

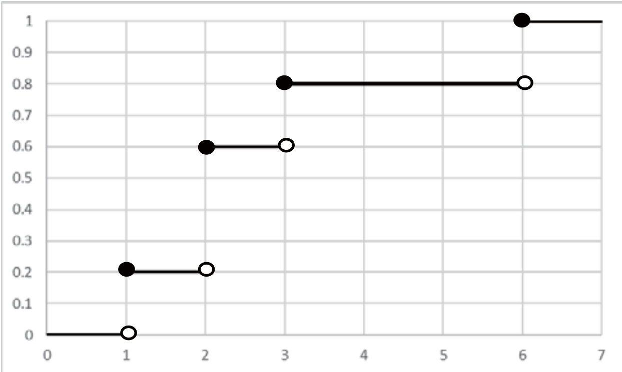
[3]　$\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n} \mp 1)}$，$\beta = \mp\dfrac{1}{2(\sqrt{n} \mp 1)}$（複合同順）。このとき $MSE[T_n] = \dfrac{1}{4(\sqrt{n}+1)^2}$。

[4]　$V[\hat{\theta}_{ML}] \le MSE[T_n]$ となるのは $\dfrac{\theta(1-\theta)}{n} \le \dfrac{1}{4(\sqrt{n}+1)^2}$ のときで，そうなる θ の範囲は

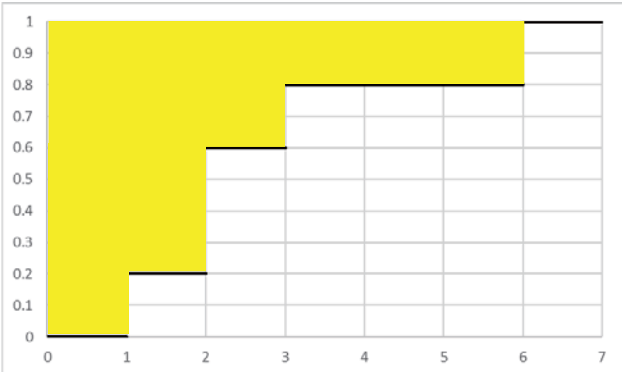
$\left|\theta - \dfrac{1}{2}\right| \ge \dfrac{\sqrt{2\sqrt{n}+1}}{2(\sqrt{n}+1)}$ であり，それ以外では $MSE[T_n]$ のほうが小さくなる。

数理４

[1]　経験分布関数は次のようである。



[2]　領域は次の網掛けの部分となる。



[3]　$\int_0^\infty \{1-F(x)\}dx = \int_0^\infty \left\{\int_x^\infty f(t)dt\right\}dx = \int_0^\infty t f(t)dt = E[X]$。

[4]　$f(x) = \dfrac{\alpha\beta^\alpha}{(\beta+x)^{\alpha+1}} \quad (x \geq 0)$

[5]　期待値が存在する範囲は $\alpha > 1$。そのとき $E[X] = \dfrac{\beta}{\alpha-1}$。

数理５

[1]　区間 $(-0.5, 0.5)$ の範囲で $f_1(x_1) = 3(0.5 - x_1)^2$，$f_2(x_2) = 6(0.25 - x_2^2)$，$f_3(x_3) = 3(x_3 + 0.5)^2$。

期待値は，$E[X_{(1)}] = -\dfrac{1}{4}$，$E[X_{(2)}] = 0$，$E[X_{(3)}] = \dfrac{1}{4}$。

[2]　$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 6 & (-0.5 < x_1 \le x_2 \le x_3 < 0.5) \\ 0 & \text{（それ以外）} \end{cases}$

[3]　$E[\hat{\theta}_c] = \theta + cE[X_{(1)}] + (1-2c)E[X_{(2)}] + cE[X_{(3)}] = \theta$

[4]　$\{y_{(1)}, y_{(2)}, y_{(3)}\}$ が観測されたときの尤度関数

$$L(\theta) = \begin{cases} 6 & (y_{(3)} - 0.5 < \theta < y_{(1)} + 0.5) \\ 0 & \text{（それ以外）} \end{cases}$$

は $\{y_{(1)}, y_{(3)}\}$ のみの関数なので，$\{Y_{(1)}, Y_{(3)}\}$ は θ に対する十分統計量。

[5]　$E[Y_{(2)} \mid Y_{(1)}, Y_{(3)}] = \dfrac{Y_{(3)} + Y_{(1)}}{2}$ であり，$V[\hat{\theta}_c]$ を最小とするのは $c = 1/2$。