数理 (23) 略解

数理１

[1]　期待値と分散は定義により容易に求められる。一方，$S_n = X_1 + \cdots + X_n$ より

$$E[S_n] = n\lambda,\quad V[S_n] = n\lambda$$

となる。

[2]　$a_i = n - i + 1$。

[3]　$E[W_n] = \dfrac{1}{2}n(n+1)\lambda$，$V[W_n] = \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\lambda$。

[4]　$\tilde{\lambda} = \dfrac{2}{n(n+1)}W_n$ は λ の不偏推定量となり，分散は $V[\tilde{\lambda}] = \dfrac{2(2n+1)}{3n(n+1)}\lambda$ となる。

[5]　チェビシェフの不等式より，任意の $c > 0$ に対して

$$P(|\tilde{\lambda} - \lambda| \geq c) \leq \frac{V[\tilde{\lambda}]}{c^2} \to 0\ (n \to \infty)$$

となるので，$\tilde{\lambda}$ は λ の一致推定量である。

[6]　漸近相対効率は

$$\lim_{n\to\infty}\frac{V[\hat{\lambda}]}{V[\tilde{\lambda}]} = \lim_{n\to\infty}\frac{\lambda / n}{2(2n+1)\lambda / \{3n(n+1)\}} = \frac{3}{4}$$

である。

数理２

[1]　$k = 1, 2, 3$ に対する確率密度関数はそれぞれ $y \ge 0$ の範囲で

$$k = 1:\quad f_1(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-y/2}$$

$$k = 2:\quad f_2(y) = \frac{1}{2}e^{-y/2}$$

$$k = 3:\quad f_3(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{y}e^{-y/2}$$

であり，グラフは図 1 のようである。

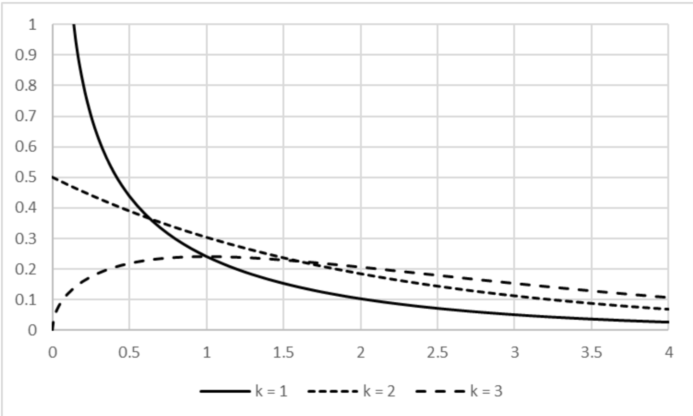

図 1：カイ二乗分布の確率密度関数 ($k = 1, 2, 3$)

[2]　(Z, Y_1) を

$$\begin{cases} S = Y_1 \\ X = Z / \sqrt{Y_1} \end{cases}$$

と変数変換すると同時確率密度関数は，$f_{X,S}(x,s) = \dfrac{1}{2\pi}\exp[-(1+x^2)s/2]$ となるので，

これを s で積分して $g(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ を得る。

[3]　$h(w) = 1/\pi$ となる $(-\pi/2 < w < \pi/2)$。これは区間 $(-\pi/2, \pi/2)$ 上の一様分布である。

[4]　区間 $(0, 1)$ 上の一様分布に従う乱数 $U_1, U_2, \ldots$ を $\pi(U_1 - 0.5), \pi(U_2 - 0.5), \ldots$ とし，$X_1 = \tan\{\pi(U_1 - 0.5)\}$，$X_2 = \tan\{\pi(U_2 - 0.5)\}, \ldots$ とすればよい。

数理３

[1]　$E[X] = 1/\lambda$。

[2]　$M_X(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda - t} \quad (t < \lambda)$。

[3]　$E[X_W] = \dfrac{1}{\lambda - h} \quad (h < \lambda)$ より $0 < h < \lambda$ に対して $E[X_W] = \dfrac{1}{\lambda - h} > \dfrac{1}{\lambda} = E[X]$ を得る。

[4]　X_W の r 次モーメントは，定義により $E[{X_W}^r] = \dfrac{M_X^{(r)}(h)}{M_X(h)}$ となる。

[5]　$E[X_W] = \dfrac{M_X^{(1)}(h)}{M_X(h)}$ であり，$\dfrac{d}{dh}\left(\dfrac{M_X^{(1)}(h)}{M_X(h)}\right) = V[X_W] \geq 0$ より，$\dfrac{M_X^{(1)}(h)}{M_X(h)}$ は h に関して単調増加である。よって，$h < 0$ のとき $E[X_W] \leq E[X]$ が成り立ち，$h > 0$ のときは $E[X_W] \geq E[X]$ が成り立つ。

数理４

[1]　積分計算により $E[W] = k$ であり，$k > 2$ として $E[1/W] = 1/(k-2)$ となる。

[2]　W_1 および W_2 の各自由度は $n-p$ および p である。また，W_1 と W_2 は互いに独立である。

[3]　$E_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{Y}}[\Delta(\boldsymbol{Z})\,|\,\boldsymbol{Y}] = \sigma^2(n+W_2)$ となる。

[4]　$E\left[\dfrac{\Delta(\boldsymbol{Z})-\Delta(\boldsymbol{Y})}{\hat{\sigma}^2}\right] = \dfrac{2n(p+1)}{n-p-2}$ となり，$\lim_{n\to\infty} E\left[\dfrac{\Delta(\boldsymbol{Z})-\Delta(\boldsymbol{Y})}{\hat{\sigma}^2}\right] = 2(p+1)$ を得る。

数理５

[1]　各 i に対し $E[U_i]=\bar{z}$ より $E[\bar{U}]=\bar{z}$ である。分散は，$V[U_i]={\sigma_N}^2$ および

$Cov[U_i,U_j]=-\dfrac{{\sigma_N}^2}{N-1}$ より，$V[\bar{U}]=\dfrac{N-m}{N-1}\cdot\dfrac{{\sigma_N}^2}{m}$ を得る。

[2]　$D=\bar{U}-\bar{V}=\dfrac{m+n}{n}(\bar{U}-\bar{z})$ および $N{\sigma_N}^2-(N-2)\tilde{S}^2=\dfrac{mn}{m+n}D^2$ である。

[3]　$E[D]=\dfrac{m+n}{m}E[\bar{U}-\bar{z}]=0$ であり，$V[D]=\dfrac{N^2}{mn(N-1)}{\sigma_N}^2$ となる。

[4]　$\tilde{W}$ を変形すると $\tilde{W}=\dfrac{\bar{U}-E[\bar{U}]}{\sqrt{V[\bar{U}]}}$ となるので，$\tilde{W}$ は近似的に $N(0, 1)$ に従う。

[5]　$\tilde{W}=\sqrt{\dfrac{N-1}{N-2+\tilde{T}^2}}\cdot\tilde{T}$ である。$\tilde{W}$ は $N(0, 1)$ に従うので，有意水準 α の場合の検定

の棄却域は，$z_{\alpha/2}$ を $N(0, 1)$ の上側 100α%点として，

$$\alpha=P(|\tilde{W}|>z_{\alpha/2})=P\left(|\tilde{T}|>\sqrt{\frac{N-2}{N-1-{z_{\alpha/2}}^2}}\cdot z_{\alpha/2}\right)$$

となる。$z_{\alpha/2}$ の係数部分は N が大きいとき近似的に 1 であることから，$\tilde{W}$ に基づく検定は T に基づく検定とほぼ同等である