統計検定

Japan Statistical Society Certificate

1級

統計数理

2023 年 11 月 19 日

【注意事項】

1 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

2 この問題冊子は，24 ページあります。

3 問題 5 問から 3 問を選択して，解答しなさい。

4 試験時間は 90 分です。

5 試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答冊子の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

6 **解答冊子・マークシートの A 面には次の項目があるので，それぞれの指示に従い記入あるいは確認しなさい。**項目の内容に誤りがある場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

① **マークシートの氏名**
氏名を記入しなさい。

② **マークシートの検定種別と受験番号**
受験する検定種別と受験番号を確認しなさい。

③ **マークシートの Web 合格発表**
Web 合格発表について，希望の有無を**マーク**しなさい。

④ **解答冊子表紙**の左上に**受験番号を記入**しなさい。

⑤ **問ごと**（**問 1**，**問 2**，...）に解答のページを改めなさい。
なお，**解答する問の順番**（**問 3**，**問 1**，**問 5** など）は問いません。

⑥ 各ページの先頭に受験番号と問題番号を書きなさい。（この冊子裏面の記入例参照）
解答冊子には，最終的な解答だけでなくそれに至る過程も記しなさい。最終的な解答が正しくないときにも点が与えられることがあります。

⑦ 解答冊子の表紙の問題番号欄の選択した問題番号を ○ で囲みなさい（得点欄には何も書かないこと）。（この冊子裏面の記入例参照）

7 15 ページ以降に付表を掲載しています。必要に応じて利用しなさい。

8 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけません。

9 試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

（冊子裏面につづく）

統計数理

問 1　互いに独立に平均 $\lambda > 0$ のポアソン分布 $Po(\lambda)$ に従う n 個の確率変数を $X_1, \ldots, X_n$ とする。$Po(\lambda)$ の確率関数は

$$f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \quad (x = 0, 1, \ldots)$$

である。$X_1, \ldots, X_n$ の初めの k 個の和を $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$ とし $(k = 1, \ldots, n)$，n 個の S_k の和を $W_n = \sum_{k=1}^{n} S_k$ と置く。以下の各問に答えよ。

〔1〕　確率変数 X が $Po(\lambda)$ に従うとき，その期待値 $E[X]$ と分散 $V[X]$ はともに λ であることを示せ。また，S_n の期待値と分散を求めよ。

〔2〕　$W_n = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ を満たす実数 $a_1, \ldots, a_n$ を求めよ。

〔3〕　W_n の期待値と分散を求めよ。ただし，公式

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1), \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

を用いてよい。

〔4〕　n と W_n を用いて λ の不偏推定量 $\tilde{\lambda}$ を 1 つ構成し，その分散を求めよ。

〔5〕　上問〔4〕の $\tilde{\lambda}$ は λ の一致推定量であるかを，その理由とともに述べよ。

〔6〕　λ の最尤推定量を $\hat{\lambda} = S_n/n$ としたとき，上問〔4〕の推定量 $\tilde{\lambda}$ の $\hat{\lambda}$ に対する漸近相対効率はいくらか。

問 2　自由度 k のカイ二乗分布に従う確率変数を Y_k とし，標準正規分布に従う確率変数を Z とする。Y_k の確率密度関数は，$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$ をガンマ関数として

$$f_k(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} y^{(k/2)-1}e^{-y/2} & (y \geq 0) \\ 0 & (y < 0) \end{cases}$$

であり，Z の確率密度関数は

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}$$

である。以下の各問に答えよ。なお，ガンマ関数の性質 $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ および $\Gamma(1) = 1$，$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ は証明なしに用いてもよい。

〔1〕　$k = 1, 2, 3$ に対し，確率密度関数 $f_1(y), f_2(y), f_3(y)$ の概形を重ねて 1 つのグラフとして描け。

〔2〕　Y_1 と Z は互いに独立とし，

$$X = Z/\sqrt{Y_1}$$

とする。X の確率密度関数は $g(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$　$(-\infty < x < \infty)$ であることを示せ。

〔3〕　上問〔2〕の X に対し $W = \tan^{-1} X$ と変数変換するとき $(-\pi/2 < W < \pi/2)$，W の確率密度関数 $h(w)$ を求めよ。またこのとき，W の分布名は何か。

〔4〕　区間 $(0, 1)$ 上の一様分布に従う乱数 $U_1, U_2, \ldots$ を用いて上問〔2〕の X の分布に従う乱数 $X_1, X_2, \ldots$ を生成する方法を示せ。

問 3　パラメータ $\lambda > 0$ の指数分布に従う確率変数を X とする。確率密度関数は

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

である。以下の〔1〕から〔3〕に答えよ。

〔1〕　X の期待値 $E[X]$ を求めよ。

〔2〕　X のモーメント母関数 $M_X(t) = E[e^{tX}]$ を求めよ。

〔3〕　確率変数 X_W は，$h > 0$ に対して，確率密度関数

$$g(x) = \frac{e^{hx} f(x)}{M_X(h)} \tag{1}$$

を持つとする。ただし，h は $M_X(t)$ が存在する t の範囲内に取る。このとき，不等式 $E[X_W] > E[X]$ が成り立つことを示せ。

これ以降，一般に正値を取る連続型確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ について考える。X のモーメント母関数 $M_X(t)$ は区間 $(-\infty, b)$ で存在すると仮定し $(b > 0)$，$-\infty < h < b$ とする。このとき，任意の正の整数 r に対し $M_X(h)$ の h に関する r 階微分 $M_X^{(r)}(h)$ は存在する。確率変数 X_W の確率密度関数 $g(x)$ を式 (1) と同じ式によって定義する。このとき，以下の〔4〕および〔5〕に答えよ。

〔4〕　X_W の r 次モーメントは

$$E[X_W^r] = \frac{M_X^{(r)}(h)}{M_X(h)}$$

と表されることを示せ。

〔5〕　$h = 0$ のとき等式 $E[X_W] = E[X]$，$h < 0$ のとき不等式 $E[X_W] \leq E[X]$，$h > 0$ のとき不等式 $E[X_W] \geq E[X]$ が成り立つことを示せ。

問 4　以下の各問に答えよ。

〔1〕　自由度 k のカイ二乗分布に従う確率変数を W とする。確率密度関数は，$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$ をガンマ関数として

$$f(w) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} w^{(k/2)-1}e^{-w/2} & (w \geq 0) \\ 0 & (w < 0) \end{cases}$$

である。このとき，W および $1/W$ の期待値 $E[W]$，$E[1/W]$ をそれぞれ求めよ。なお，k は $E[W]$，$E[1/W]$ が存在する範囲の値とする。

$\boldsymbol{Y}$ を n 次元確率変数ベクトル，X を $n \times p$ の説明変数行列 $(\mathrm{rank}(X) = p)$，$\boldsymbol{\beta}$ を p 次元回帰係数ベクトル，$\boldsymbol{\varepsilon}$ を各成分が互いに独立に $N(0, \sigma^2)$ に従う n 次元確率変数ベクトルとしたとき，線形重回帰モデル $\boldsymbol{Y} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ における未知パラメータ $\boldsymbol{\beta}$ の最尤推定量は $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(X^TX\right)^{-1}X^T\boldsymbol{Y}$ で与えられる。ここで上付き添え字の ^{T} は行列もしくはベクトルの転置を表す。最尤推定量 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ に基づく $\boldsymbol{Y}$ の予測値を $\hat{\boldsymbol{Y}} = X\hat{\boldsymbol{\beta}}$ とし，残差 $\boldsymbol{Y} - \hat{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{Y} - X\hat{\boldsymbol{\beta}}$ の 2 乗和を $\Delta(\boldsymbol{Y}) = \left(\boldsymbol{Y} - X\hat{\boldsymbol{\beta}}\right)^T\left(\boldsymbol{Y} - X\hat{\boldsymbol{\beta}}\right)$ としたとき，σ^2 の最尤推定量は

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\Delta(\boldsymbol{Y}) = \frac{1}{n}\left(\boldsymbol{Y} - X\hat{\boldsymbol{\beta}}\right)^T\left(\boldsymbol{Y} - X\hat{\boldsymbol{\beta}}\right)$$

となる（除数が n であることに注意）。以下の問題ではこのことを用いる。

〔2〕　$W_1 = n\hat{\sigma}^2/\sigma^2$，$W_2 = \left(X\hat{\boldsymbol{\beta}} - X\boldsymbol{\beta}\right)^T\left(X\hat{\boldsymbol{\beta}} - X\boldsymbol{\beta}\right)/\sigma^2$ としたとき，W_1，W_2 はそれぞれカイ二乗分布に従う。このとき，W_1 および W_2 の分布の自由度はそれぞれいくらか。また，W_1 と W_2 は独立であるかどうかを示せ。

〔3〕　同じ説明変数行列 X の下で，$\boldsymbol{Y}$ とは別の n 次元確率変数ベクトル $\boldsymbol{Z}$ に対するモデル $\boldsymbol{Z} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}'$ を考える。ここで $\boldsymbol{\varepsilon}'$ は，各成分が独立に $N(0, \sigma^2)$ に従い，$\boldsymbol{\varepsilon}$ とも独立な n 次元確率変数ベクトルとする。$\boldsymbol{Y}$ から得られた推定量 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ に基づく予測値 $\hat{\boldsymbol{Y}} = X\hat{\boldsymbol{\beta}}$ と $\boldsymbol{Z}$ との差の 2 乗和を $\Delta(\boldsymbol{Z}) = \left(\boldsymbol{Z} - X\hat{\boldsymbol{\beta}}\right)^T\left(\boldsymbol{Z} - X\hat{\boldsymbol{\beta}}\right)$ とする。このとき，$\boldsymbol{Y}$ を固定した条件付きでの $\boldsymbol{Z}$ の分布に関する条件付き期待値 $E_{\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{Y}}[\Delta(\boldsymbol{Z}) \mid \boldsymbol{Y}]$ を n，W_2，σ^2 を用いて表せ。

〔4〕　$\boldsymbol{Z}$ と $\boldsymbol{Y}$ に関する周辺期待値 $E\left[\dfrac{\Delta(\boldsymbol{Z}) - \Delta(\boldsymbol{Y})}{\hat{\sigma}^2}\right]$ を求めよ。また，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} E\left[\dfrac{\Delta(\boldsymbol{Z}) - \Delta(\boldsymbol{Y})}{\hat{\sigma}^2}\right]$ を求めよ。

問 5　2 つの母集団 A，B は，それぞれの母平均を μ_1，μ_2 として，確率密度関数がそれぞれ $f(x-\mu_1)$，$f(x-\mu_2)$ である連続分布を持つとし，帰無仮説 $H_0: \mu_1 = \mu_2$ と対立仮説 $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ に対する検定を行う。各母集団 A，B から独立にそれぞれ大きさ m，n の標本 $X_1, \ldots, X_m$ と $Y_1, \ldots, Y_n$ を抽出し，

$$\bar{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i,\ \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i,\ S^2 = \frac{1}{m+n-2}\left\{\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2\right\}$$

として，検定統計量を

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)S^2}}$$

とする。

抽出した $N = m + n$ 個の値をまとめて $\Omega_N = \{z_1, \ldots, z_N\}$ とし，H_0 の下で Ω_N を固定した条件付き分布を考察する。Ω_N から非復元抽出で無作為に m 個を選んで A からの標本 $U_1, \ldots, U_m$, 残りの n 個を B からの標本 $V_1, \ldots, V_n$ とみなし，

$$\bar{U} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} U_i,\ \bar{V} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V_i,\ \tilde{S}^2 = \frac{1}{m+n-2}\left\{\sum_{i=1}^{m}(U_i - \bar{U})^2 + \sum_{i=1}^{n}(V_i - \bar{V})^2\right\}$$

および

$$\tilde{T} = \frac{D}{\sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)\tilde{S}^2}},\ D = \bar{U} - \bar{V} \tag{1}$$

と置く。H_0 の下では，Ω_N の各値が A からの標本とされる確率は同じで，Ω_N を固定した条件付きで，$\tilde{T}$ の分布は T の分布と等しい。なお，m と n が十分大きいとき，$\bar{U}$ の期待値と分散をそれぞれ $E[\bar{U}]$，$V[\bar{U}]$ としたとき，$(\bar{U} - E[\bar{U}])/\sqrt{V[\bar{U}]}$ は近似的に標準正規分布 $N(0,1)$ に従うとし，以下ではこの事実を用いる。以下の各問に答えよ。

〔1〕　有限母集団 $\Omega_N = \{z_1, \ldots, z_N\}$ の母平均と母分散を

$$\bar{z} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z_i,\ \sigma_N^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(z_i - \bar{z})^2$$

と置く。$\bar{U}$ の期待値と分散はそれぞれ

$$E[\bar{U}] = \bar{z},\ V[\bar{U}] = \frac{N-m}{N-1} \cdot \frac{\sigma_N^2}{m}$$

となることを示せ。

〔2〕　$D=\bar{U}-\bar{V}$ を $\bar{U}$，$\bar{z}$，m，n で表せ。また，$N\sigma_N^2-(N-2)\tilde{S}^2$ を D，m，n で表せ。

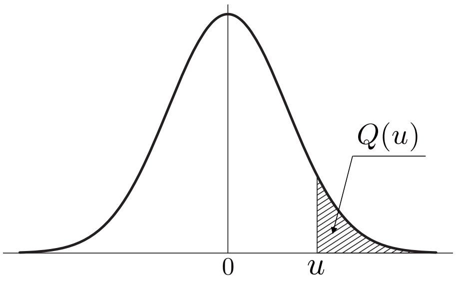
〔3〕　D の期待値 $E[D]$ と分散 $V[D]$ を σ_N^2，N，m，n を用いて表せ。

〔4〕　m と n が十分大きいとき，D を標準化した $\tilde{W}=(D-E[D])/\sqrt{V[D]}$ が近似的に $N(0,1)$ に従う理由を述べよ。

〔5〕　上問〔4〕の $\tilde{W}$ を式 (1) の $\tilde{T}$ の関数 $\tilde{W}=g(\tilde{T})$ として表せ。また，元の観測値に戻って $W=g(T)$ と置く。有意水準を α とし，T，W のそれぞれに基づいて標準正規分布のパーセント点を用いて検定を行う際の実際の有意水準について論ぜよ。

付　表

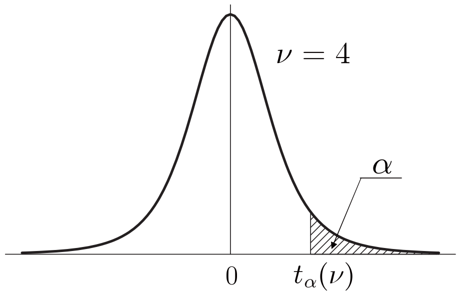
付表 1. 標準正規分布の上側確率



u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
3.6	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
3.7	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
3.8	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
3.9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

$u = 0.00 \sim 3.99$ に対する，正規分布の上側確率 $Q(u)$ を与える。
例：$u = 1.96$ に対しては，左の見出し 1.9 と上の見出し .06 との交差点で，$Q(u) = .0250$ と読む。表にない u に対しては適宜補間すること。

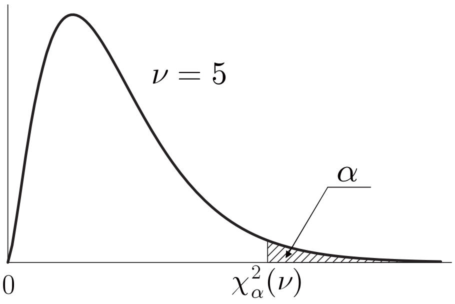
付表 2. t 分布のパーセント点



	α				
ν	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
240	1.285	1.651	1.970	2.342	2.596
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

自由度 ν の t 分布の上側確率 α に対する t の値を $t_\alpha(\nu)$ で表す。
例：自由度 $\nu = 20$ の上側 5%点 $(\alpha = 0.05)$ は，$t_{0.05}(20) = 1.725$ である。
表にない自由度に対しては適宜補間すること。

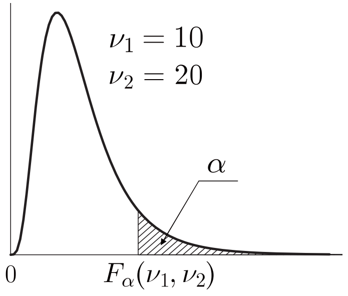
付表3. カイ二乗分布のパーセント点



	α							
ν	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01
1	0.00	0.00	0.00	0.02	2.71	3.84	5.02	6.63
2	0.02	0.05	0.10	0.21	4.61	5.99	7.38	9.21
3	0.11	0.22	0.35	0.58	6.25	7.81	9.35	11.34
4	0.30	0.48	0.71	1.06	7.78	9.49	11.14	13.28
5	0.55	0.83	1.15	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09
6	0.87	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81
7	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48
8	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09
9	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67
10	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21
11	3.05	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.72
12	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22
13	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69
14	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14
15	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58
16	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00
17	6.41	7.56	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41
18	7.01	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81
19	7.63	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19
20	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57
25	11.52	13.12	14.61	16.47	34.38	37.65	40.65	44.31
30	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89
35	18.51	20.57	22.47	24.80	46.06	49.80	53.20	57.34
40	22.16	24.43	26.51	29.05	51.81	55.76	59.34	63.69
50	29.71	32.36	34.76	37.69	63.17	67.50	71.42	76.15
60	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38
70	45.44	48.76	51.74	55.33	85.53	90.53	95.02	100.43
80	53.54	57.15	60.39	64.28	96.58	101.88	106.63	112.33
90	61.75	65.65	69.13	73.29	107.57	113.15	118.14	124.12
100	70.06	74.22	77.93	82.36	118.50	124.34	129.56	135.81
120	86.92	91.57	95.70	100.62	140.23	146.57	152.21	158.95
140	104.03	109.14	113.66	119.03	161.83	168.61	174.65	181.84
160	121.35	126.87	131.76	137.55	183.31	190.52	196.92	204.53
180	138.82	144.74	149.97	156.15	204.70	212.30	219.04	227.06
200	156.43	162.73	168.28	174.84	226.02	233.99	241.06	249.45
240	191.99	198.98	205.14	212.39	268.47	277.14	284.80	293.89

自由度 ν のカイ二乗分布の上側確率 α に対する χ^2 の値を $\chi^2_\alpha(\nu)$ で表す。
例：自由度 $\nu = 20$ の上側 5%点 $(\alpha = 0.05)$ は，$\chi^2_{0.05}(20) = 31.41$ である。
表にない自由度に対しては適宜補間すること。

付表 4. F 分布のパーセント点



$\alpha = 0.05$

$\nu_2 \setminus \nu_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	40	60	120	∞
5	6.608	5.786	5.409	5.192	5.050	4.950	4.876	4.818	4.772	4.735	4.619	4.558	4.464	4.431	4.398	4.365
10	4.965	4.103	3.708	3.478	3.326	3.217	3.135	3.072	3.020	2.978	2.845	2.774	2.661	2.621	2.580	2.538
15	4.543	3.682	3.287	3.056	2.901	2.790	2.707	2.641	2.588	2.544	2.403	2.328	2.204	2.160	2.114	2.066
20	4.351	3.493	3.098	2.866	2.711	2.599	2.514	2.447	2.393	2.348	2.203	2.124	1.994	1.946	1.896	1.843
25	4.242	3.385	2.991	2.759	2.603	2.490	2.405	2.337	2.282	2.236	2.089	2.007	1.872	1.822	1.768	1.711
30	4.171	3.316	2.922	2.690	2.534	2.421	2.334	2.266	2.211	2.165	2.015	1.932	1.792	1.740	1.683	1.622
40	4.085	3.232	2.839	2.606	2.449	2.336	2.249	2.180	2.124	2.077	1.924	1.839	1.693	1.637	1.577	1.509
60	4.001	3.150	2.758	2.525	2.368	2.254	2.167	2.097	2.040	1.993	1.836	1.748	1.594	1.534	1.467	1.389
120	3.920	3.072	2.680	2.447	2.290	2.175	2.087	2.016	1.959	1.910	1.750	1.659	1.495	1.429	1.352	1.254

$\alpha = 0.025$

$\nu_2 \setminus \nu_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	40	60	120	∞
5	10.007	8.434	7.764	7.388	7.146	6.978	6.853	6.757	6.681	6.619	6.428	6.329	6.175	6.123	6.069	6.015
10	6.937	5.456	4.826	4.468	4.236	4.072	3.950	3.855	3.779	3.717	3.522	3.419	3.255	3.198	3.140	3.080
15	6.200	4.765	4.153	3.804	3.576	3.415	3.293	3.199	3.123	3.060	2.862	2.756	2.585	2.524	2.461	2.395
20	5.871	4.461	3.859	3.515	3.289	3.128	3.007	2.913	2.837	2.774	2.573	2.464	2.287	2.223	2.156	2.085
25	5.686	4.291	3.694	3.353	3.129	2.969	2.848	2.753	2.677	2.613	2.411	2.300	2.118	2.052	1.981	1.906
30	5.568	4.182	3.589	3.250	3.026	2.867	2.746	2.651	2.575	2.511	2.307	2.195	2.009	1.940	1.866	1.787
40	5.424	4.051	3.463	3.126	2.904	2.744	2.624	2.529	2.452	2.388	2.182	2.068	1.875	1.803	1.724	1.637
60	5.286	3.925	3.343	3.008	2.786	2.627	2.507	2.412	2.334	2.270	2.061	1.944	1.744	1.667	1.581	1.482
120	5.152	3.805	3.227	2.894	2.674	2.515	2.395	2.299	2.222	2.157	1.945	1.825	1.614	1.530	1.433	1.310

自由度 (ν_1, ν_2) の F 分布の上側確率 α に対する F の値を $F_\alpha(\nu_1, \nu_2)$ で表す。
例：自由度 $\nu_1 = 5, \nu_2 = 20$ の上側 5% 点 $(\alpha = 0.05)$ は，$F_{0.05}(5, 20) = 2.711$ である。
表にない自由度に対しては適宜補間すること。

付表 5. 指数関数と常用対数

指数関数			
x	e^x	x	e^x
0.01	1.0101	0.51	1.6653
0.02	1.0202	0.52	1.6820
0.03	1.0305	0.53	1.6989
0.04	1.0408	0.54	1.7160
0.05	1.0513	0.55	1.7333
0.06	1.0618	0.56	1.7507
0.07	1.0725	0.57	1.7683
0.08	1.0833	0.58	1.7860
0.09	1.0942	0.59	1.8040
0.10	1.1052	0.60	1.8221
0.11	1.1163	0.61	1.8404
0.12	1.1275	0.62	1.8589
0.13	1.1388	0.63	1.8776
0.14	1.1503	0.64	1.8965
0.15	1.1618	0.65	1.9155
0.16	1.1735	0.66	1.9348
0.17	1.1853	0.67	1.9542
0.18	1.1972	0.68	1.9739
0.19	1.2092	0.69	1.9937
0.20	1.2214	0.70	2.0138
0.21	1.2337	0.71	2.0340
0.22	1.2461	0.72	2.0544
0.23	1.2586	0.73	2.0751
0.24	1.2712	0.74	2.0959
0.25	1.2840	0.75	2.1170
0.26	1.2969	0.76	2.1383
0.27	1.3100	0.77	2.1598
0.28	1.3231	0.78	2.1815
0.29	1.3364	0.79	2.2034
0.30	1.3499	0.80	2.2255
0.31	1.3634	0.81	2.2479
0.32	1.3771	0.82	2.2705
0.33	1.3910	0.83	2.2933
0.34	1.4049	0.84	2.3164
0.35	1.4191	0.85	2.3396
0.36	1.4333	0.86	2.3632
0.37	1.4477	0.87	2.3869
0.38	1.4623	0.88	2.4109
0.39	1.4770	0.89	2.4351
0.40	1.4918	0.90	2.4596
0.41	1.5068	0.91	2.4843
0.42	1.5220	0.92	2.5093
0.43	1.5373	0.93	2.5345
0.44	1.5527	0.94	2.5600
0.45	1.5683	0.95	2.5857
0.46	1.5841	0.96	2.6117
0.47	1.6000	0.97	2.6379
0.48	1.6161	0.98	2.6645
0.49	1.6323	0.99	2.6912
0.50	1.6487	1.00	2.7183

常用対数			
x	$\log_{10} x$	x	$\log_{10} x$
0.1	-1.0000	5.1	0.7076
0.2	-0.6990	5.2	0.7160
0.3	-0.5229	5.3	0.7243
0.4	-0.3979	5.4	0.7324
0.5	-0.3010	5.5	0.7404
0.6	-0.2218	5.6	0.7482
0.7	-0.1549	5.7	0.7559
0.8	-0.0969	5.8	0.7634
0.9	-0.0458	5.9	0.7709
1.0	0.0000	6.0	0.7782
1.1	0.0414	6.1	0.7853
1.2	0.0792	6.2	0.7924
1.3	0.1139	6.3	0.7993
1.4	0.1461	6.4	0.8062
1.5	0.1761	6.5	0.8129
1.6	0.2041	6.6	0.8195
1.7	0.2304	6.7	0.8261
1.8	0.2553	6.8	0.8325
1.9	0.2788	6.9	0.8388
2.0	0.3010	7.0	0.8451
2.1	0.3222	7.1	0.8513
2.2	0.3424	7.2	0.8573
2.3	0.3617	7.3	0.8633
2.4	0.3802	7.4	0.8692
2.5	0.3979	7.5	0.8751
2.6	0.4150	7.6	0.8808
2.7	0.4314	7.7	0.8865
2.8	0.4472	7.8	0.8921
2.9	0.4624	7.9	0.8976
3.0	0.4771	8.0	0.9031
3.1	0.4914	8.1	0.9085
3.2	0.5051	8.2	0.9138
3.3	0.5185	8.3	0.9191
3.4	0.5315	8.4	0.9243
3.5	0.5441	8.5	0.9294
3.6	0.5563	8.6	0.9345
3.7	0.5682	8.7	0.9395
3.8	0.5798	8.8	0.9445
3.9	0.5911	8.9	0.9494
4.0	0.6021	9.0	0.9542
4.1	0.6128	9.1	0.9590
4.2	0.6232	9.2	0.9638
4.3	0.6335	9.3	0.9685
4.4	0.6435	9.4	0.9731
4.5	0.6532	9.5	0.9777
4.6	0.6628	9.6	0.9823
4.7	0.6721	9.7	0.9868
4.8	0.6812	9.8	0.9912
4.9	0.6902	9.9	0.9956
5.0	0.6990	10.0	1.0000

注: 常用対数を自然対数に直すには 2.3026 をかければよい。

【解答冊子記入例】

- 注意事項 6 ⑥ :〔解答冊子各ページ先頭の記入例〕

（例）問 1 を解答する場合

受験番号 1 2 3 4 5 6 7

問題番号 問1

両端の余白には何も記入しないこと

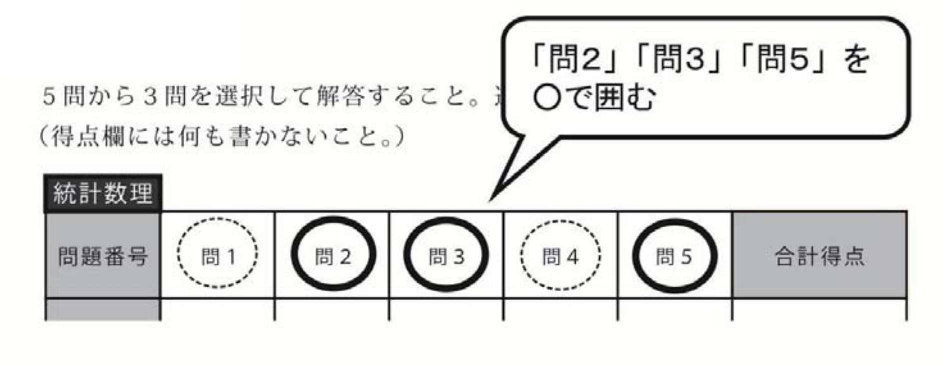
. . . .

. . . .

. . . .

- 注意事項 6 ⑦ :〔解答冊子表紙選択問題の記入例〕

（例）問 **2**，問 **3**，問 **5** を選択し，解答する場合



5問から３問を選択して解答すること。

（得点欄には何も書かないこと。）

「問2」「問3」「問5」を○で囲む

統計数理

問題番号	問 1	問 2	問 3	問 4	問 5	合計得点

一般財団法人　統計質保証推進協会

統計検定センター

〒101-0051 東京都千代田区神田神保町３丁目６番
URL **http://www.toukei-kentei.jp**

2023.11