統計検定

Japan Statistical Society Certificate

1級

統計応用

2023 年 11 月 19 日

【注意事項】

1 **試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。**

2 この問題冊子は，60 ページあります。**3〜13 ページ**は**人文科学**，**15〜25 ページ**は**社会科学**，**27〜37 ページ**は**理工学**，**39〜49 ページ**は**医薬生物学**の問題です。

3 選択した分野の問題 5 問から 3 問を選択して，解答しなさい。

4 試験時間は 90 分です。

5 試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答冊子の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

6 **解答冊子・マークシートの A 面には次の項目があるので，それぞれの指示に従い記入あるいは確認しなさい。**項目の内容に誤りがある場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

① **マークシート**の**氏名**
氏名を**記入**しなさい。
② **マークシート**の**検定種別**と**受験番号**
受験する検定種別と**受験番号**を確認しなさい。
③ **マークシート**の **Web 合格発表**
Web 合格発表について，希望の有無を**マーク**しなさい。
④ **解答冊子表紙**の左上に**受験番号**を**記入**しなさい。
⑤ **問**ごと（**問 1**，**問 2**，...）に解答のページを改めなさい。
なお，**解答する問の順番**（**問 3**，**問 1**，**問 5** など）は**問いません。**
⑥ 各ページの先頭に受験番号と問題番号を書きなさい。（<u>この冊子裏面の記入例参照</u>）
解答冊子には，最終的な解答だけでなくそれに至る過程も記しなさい。最終的な解答が正しくないときにも点が与えられることがあります。
⑦ 解答冊子の表紙の選択分野欄の選択した分野と，問題番号欄の選択した問題番号をそれぞれ ◯ で囲みなさい（得点欄には何も書かないこと）。（<u>この冊子裏面の記入例参照</u>）

7 51 ページ以降に付表を掲載しています。必要に応じて利用しなさい。

8 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離してはいけません。

9 試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

（冊子裏面につづく）

人文科学

問 1　ある大学の文理融合学部における統計学の授業の履修生は 300 名であり，そのうち文系の学生は 200 名，理系の学生は 100 名であった。300 名全員が期末試験を受験した。期末試験は 100 点満点で，受験生の点数の分布は，授業が数学的な内容を含むこともあり，文系学生は正規分布 $N(70, 4^2)$ で，理系学生は正規分布 $N(79, 4^2)$ で近似できた。受験生全体の点数の分布は文系学生および理系学生それぞれの点数の分布の 2 : 1 の混合比の混合分布になる。以下の各問に答えよ。

ただし，正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ の確率密度関数は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

であり，試験の点数の偏差値は対象集団全体で平均 50，標準偏差 10 に基準化した値である。

〔1〕　この期末試験において，文系の A さんは 74 点，理系の B さんは 86 点であった。文系学生の中における A さんの偏差値と，理系学生の中における B さんの偏差値をそれぞれ求めよ。また，この期末試験では 70 点以上を合格とした。受験生全体の合格率を正規分布表から求めよ。

〔2〕　受験生全体の点数の分布（文系学生の点数の分布と理系学生の点数の分布の混合分布）の平均と分散はそれぞれいくらか。また，受験生全体の中における A さんと B さんの偏差値はそれぞれいくらか。

〔3〕　受験生全体の点数の分布の形状を考察する。

〔3-1〕　分布の混合比を考慮し，文系学生および理系学生の点数の確率密度関数の概形，ならびにそれらを混合した受験生全体の点数の分布の概形を描け。

〔3-2〕　受験生全体の分布の最頻値（確率密度関数の最大値を与える値）は 70 未満か，70 に等しいか，それとも 70 よりも大きいかを，受験生全体の点数の分布の確率密度関数を x で微分して導関数の符号を調べることにより示せ。

問 2　ある予備校の生徒全体における大学入学共通テストの 2 つの科目の点数をそれぞれ X, Y とし，X と Y の相関係数を r_{XY} とする。この予備校には様々な志望大学の生徒がいて，各生徒の第一志望大学の偏差値 W に対し，X と W の相関係数は r_{XW} で，Y と W の相関係数は r_{YW} であるとする。このとき，W の影響を除いた X と Y の間の偏相関係数 $r_{XY/W}$ は

$$r_{XY/W} = \frac{r_{XY} - r_{XW}r_{YW}}{\sqrt{(1-r_{XW}^2)(1-r_{YW}^2)}} \tag{1}$$

で与えられる。以下の各問に答えよ。

なお，以下では，X，Y，W はすべて平均 0，分散 1 に標準化されているものとする。すなわち，各 2 変量間の共分散は相関係数に等しい。

〔1〕　各相関係数は $r_{XY} = 0.72$，$r_{XW} = 0.9$，$r_{YW} = 0.8$ であったとする。X と Y の間の偏相関係数 $r_{XY/W}$ の値を式 (1) から具体的に求めよ。その計算結果を踏まえ，3 変数間の関係を説明せよ。

〔2〕　X と W の間および Y と W の間の関係を

$$\begin{cases} X = r_{XW}W + E_1 \\ Y = r_{YW}W + E_2 \end{cases} \tag{2}$$

と置く。ここで，E_1，E_2 はそれぞれ W とは独立で平均が 0 の確率変数である。

〔2-1〕　式 (2) における E_1 および E_2 の分散はそれぞれいくらか。

〔2-2〕　式 (2) における E_1 と E_2 の相関係数は式 (1) の偏相関係数 $r_{XY/W}$ に一致することを示せ。

〔3〕　相関係数の値が上問〔1〕のとき，Y を X で予測する単回帰式 $Y = aX$ および Y を X と W で予測する重回帰式 $Y = b_1X + b_2W$ における係数 a および b_1 と b_2 を求めよ。なお，X，Y，W はすべて平均 0 に標準化されているので，回帰式における定数項は 0 であることに注意する。

ある A 大学は，入試制度の一つとして大学入学共通テストの 2 つの科目の点数の合計点で合否を決めている。A 大学のこの入試制度を選択した受験生全体の 2 つの科目の点数を X_A および Y_A とし，それらの合計点を $T_A = X_A + Y_A$ とする。

〔4〕　X_A，Y_A はともに分散 1 に標準化されているとし，X_A と Y_A の間の相関係数は，上問〔1〕で求めた偏相関係数に等しいとする。

〔4-1〕　T_A と X_A の間の相関係数および T_A と Y_A の間の相関係数はそれぞれいくらか。

〔4-2〕　合計点 T_A で大学への合否を決めた場合の実際の入学者における X_A と Y_A の相関について論ぜよ。

問 3　2 群 G_j $(j=1,2)$ の母集団分布はそれぞれ平均ベクトル $\boldsymbol{\mu}_j$，分散共分散行列 Σ_j の 2 変量正規分布 $N_2(\boldsymbol{\mu}_j, \Sigma_j)$ であるとし，Σ_j は正定値とする。このとき，観測値 $\boldsymbol{x}$ と各群の母平均との間のマハラノビスの平方距離を

$$D_j^2 = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}_j)^T \Sigma_j^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}_j)$$

とする。ここで，上付き添え字 ^{T} はベクトルもしくは行列の転置を表す。以下では，成分がすべて 0 の列ベクトルを $\mathbf{0}$，成分がすべて 1 の列ベクトルを $\mathbf{1}$ とし，単位行列を $\boldsymbol{I}$ とする。

群 G_1 の母集団分布が $N_2(\mathbf{1}, \boldsymbol{I})$，群 G_2 の母集団分布が $N_2(-\mathbf{1}, 2^2\boldsymbol{I})$ であるとき，以下の各問に答えよ。

〔1〕　観測値 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ から各群の母平均へのマハラノビスの平方距離 D_1^2 および D_2^2 をそれぞれ求めよ。

〔2〕　$D_1^2 = D_2^2$ から導かれる $\boldsymbol{x}$ の 2 次方程式を $f(\boldsymbol{x}) = a\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x} + c = 0$ の形で示せ。

〔3〕　各群の母集団分布に従う確率ベクトル $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ に対し，それを時計回りに $\pi/4$ だけ回転したベクトル $\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$ の各成分を

$$Y_1 = (X_1 + X_2)/\sqrt{2}, \quad Y_2 = (X_2 - X_1)/\sqrt{2}$$

とする。

〔3-1〕　各群 G_j $(j=1,2)$ において Y_1 が従う分布をそれぞれ示せ。

〔3-2〕　群 G_1 において Y_1 が 0 より小さくなる確率 $P(Y_1 < 0 | G_1)$ と，群 G_2 において Y_1 が 0 以上となる確率 $P(Y_1 \geq 0 | G_2)$ をそれぞれ求めよ。

〔4〕　2つの群から無作為に50個ずつの観測値を抽出し，それらの値を用いて線形判別分析および2次判別分析を行ったところ，これらについて表1のような誤判別が生じた。

表1：線形判別分析および2次判別分析での誤判別率

	線形判別分析		誤判別率
	G_1 と判別	G_2 と判別	
群 G_1	46	4	0.08
群 G_2	9	41	0.18

	2次判別分析		誤判別率
	G_1 と判別	G_2 と判別	
群 G_1	45	5	0.10
群 G_2	5	45	0.10

さらに，あらためて各群から無作為に50個ずつの観測値を抽出し，表1を得た際に用いた判別境界直線と判別境界曲線により誤判別率を求めたところ，表2のようになった。表2のほうが誤判別が多いが，この理由として考えられるものを述べ，一般に，誤判別率の推定に関する留意点を述べよ。

表2：新たなデータによる誤判別率

	線形判別分析		誤判別率
	G_1 と判別	G_2 と判別	
群 G_1	46	4	0.08
群 G_2	12	38	0.24

	2次判別分析		誤判別率
	G_1 と判別	G_2 と判別	
群 G_1	44	6	0.12
群 G_2	10	40	0.20

問 4　パートタイム労働者の賃金につき，ある都市で実態調査が行われた。調査項目は，各人の一日当たりの労働時間と，同じく一日当たりの賃金（単位：千円）とされた。なお，各人の一日当たりの労働時間は 5 時間，6 時間，7 時間，8 時間のいずれかであった。

統計家 A は，一日当たりの賃金 (y) を一日当たりの労働時間 (x) で予測する回帰式 $y = a + bx$ を男女ごとに求めた。表 1 は，男女別の労働時間ごとの回答人数の割合と求められた回帰式による賃金の予測値 $(\hat{y})$ である。なお，回帰の残差分散は男女とも $s_e^2 = 0.972$ であった。以下の各問に答えよ。

表 1：男女別の労働時間ごとの割合と回帰式による平均賃金の予測値

(a) 男性の労働時間と平均賃金の予測値

労働時間 (x)	5	6	7	8
割合	0.1	0.15	0.4	0.35
予測値 $(\hat{y})$	7.2	7.8	8.4	9.0

(b) 女性の労働時間と平均賃金の予測値

労働時間 (x)	5	6	7	8
割合	0.35	0.4	0.15	0.1
予測値 $(\hat{y})$	6.6	7.2	7.8	8.4

〔1〕　統計家 A が算出した回帰式 $y = a + bx$ は，男性と女性でそれぞれどのような式であったかを示せ。また，その回帰式から，同じ労働時間の男女間で平均賃金に差が見られるかどうかを述べよ。

〔2〕　統計家 B は，男性の労働時間の平均 $\bar{x}_M$ と賃金の平均 $\bar{y}_M$ および女性の労働時間の平均 $\bar{x}_F$ と賃金の平均 $\bar{y}_F$ から，男女ごとの 1 時間当たりの賃金 $\bar{y}_M/\bar{x}_M$ および $\bar{y}_F/\bar{x}_F$ を算出してそれらを比較すべきと考えた。表 1 から $\bar{x}_M$，$\bar{y}_M$，$\bar{x}_F$，$\bar{y}_F$ を求めて $\bar{y}_M/\bar{x}_M$ および $\bar{y}_F/\bar{x}_F$ を算出し，男女間で 1 時間当たりの賃金に差が見られるかどうかを述べよ。

〔3〕　統計家 C は見方を変え，賃金 (y) から労働時間 (x) を予測する回帰式 $x = c + dy$ に基づき，同一賃金を得ている集団内で，男女間で平均労働時間に差があるかどうかに注目した。男女ごとの回帰式の定数 c および傾き d を求め，賃金 $y = 7.2$ 千円を得ている人々の平均労働時間 (x) を男女別に求めよ。その回帰式から，同じ賃金を得ている男女間で平均労働時間に差が見られるかどうかを述べよ。

〔4〕　上問〔1〕から〔3〕の結果から，このデータから言えることとして，男女間で差が見られるかどうかを述べよ。

問 5　次の令美さんと和夫さんの会話を読み，以下の各問に答えよ。

令美：　ゲームをしよう。ここに箱が 3 つあります。それぞれ箱 1，箱 2，箱 3 として，その中の 1 つに今からチョコレートを入れるからそれを当てて欲しい。ＯＫ？
和夫：　よし分かった。簡単なゲームだ。

令美さんは和夫さんに分からないように箱をランダムに等確率で 1 つ選び，その箱にチョコレートを入れてふたを閉める。

令美：　さあ，どの箱を選ぶ？
和夫：　じゃあ箱 1 にする。
令美：　箱 1 をすぐに開けるのでは面白くないから，和夫さんが選ばなかった箱を 1 つ開けます。

と言って箱 3 を開けると，中にはチョコレートがなく外れである。

令美：　さっき箱 1 を選んだけど，この段階で箱 2 にスイッチしてもいいことにしましょう。箱 2 にスイッチする？それとも箱 1 のままとする？
和夫：　開いてない箱は 2 つで，どちらかが当たりのはずだから当たる確率は 1/2 だ。箱 2 にスイッチして箱 1 が当たりだと後悔するから箱 1 のままとするよ。
令美：　了解。でも，スイッチしたほうが当たりの確率は 2 倍になるんだけど。
和夫：　？ ？ ？

〔1〕　一般に，標本空間 Ω が互いに排反な m 個の事象 $A_1, \ldots, A_m$ に分割されているとする。すなわち，$A_1 \cup \cdots \cup A_m = \Omega$ で，$j \neq k$ のとき $A_j \cap A_k = \emptyset$ である（$\emptyset$ は空集合）。各事象の生起確率がすべて等しく $P(A_1) = \cdots = P(A_m) = 1/m$ であるとき，$P(B) > 0$ である事象 B に対し，条件付き確率 $P(A_j \mid B)$ は $P(B \mid A_j)$ に比例すること，すなわち，c を比例定数として $P(A_j \mid B) = cP(B \mid A_j)$ $(j = 1, \ldots, m)$ となることを示せ。

〔2〕　箱 2 が当たりである確率は 2/3 であることを示せ。ただし，令美さんが開ける可能性のある箱が 2 つある場合，すなわち和夫さんが選択した箱 1 が当たりであるとき，令美さんが外れの箱 2 もしくは箱 3 を開ける確率はいずれも等しいと仮定する。なお，上問〔1〕の結果を用いても用いなくてもよい。

〔3〕　令美さんが開ける可能性のある箱が 2 つある場合に，令美さんが箱 3 を開ける確率を一般に w としたとき（上問〔2〕では $w = 0.5$ であった），箱 2 が当たりである確率 p を w の関数として表せ。それをもとに，箱 2 が当たりである確率の存在範囲を示せ。

上問〔2〕の設定で，箱 2 が当たりである確率は $2/3$ であるが，それが $1/2$ であると思い込んでいる和夫さんを説得するため，実験を行うことにした。箱をスイッチして当たりとなる確率を p としたとき，n 回の実験で当たりとなる回数を X とすると，X は試行回数 n，確率 p の二項分布 $B(n,p)$ に従う。検定の問題として定式化すると，帰無仮説は $H_0 : p = 1/2$ で，対立仮説は $H_1 : p = 2/3$ である。

〔4〕　X が二項分布 $B(n,p)$ に従うとして，$H_0 : p = 1/2$ を $H_1 : p = 2/3$ に対して有意水準 $\alpha = 0.05$ で検定する。このとき，H_0 の棄却域が $X \geq n-1$ となるように試行回数 n を設定したい。$P(X \geq n-1 \mid p = 1/2) \leq 0.05$ となるような最小の n の値 n_0 はいくらか。また，試行回数が n_0 のとき，この検定の検出力はいくらか。

社会科学

問 1　標本調査では，母集団パラメータの比が経済学的に意味を持つことも，他のパラメータの推定に有用いられることもある。例えば，世帯人員 (X) と世帯当たりの食費支出 (Y) の母集団全体での平均をそれぞれ μ_X および μ_Y としたとき，比 $R = \mu_Y/\mu_X$ は世帯人員一人当たりの食費支出である。一方，X の調査は比較的容易であるが，Y の調査は困難である場合には，μ_X が既知もしくは精度良く推定されるので，比 R の何らかの推定量を $\hat{R}$ として，μ_Y を $\hat{\mu}_Y = \hat{R}\mu_X$ によって推定することができる。これを比推定という。

以下では，2 変量確率変数 (X, Y) の各変量の母平均と母分散をそれぞれ μ_X，μ_Y および σ_X^2，σ_Y^2 とし，X と Y の間の母共分散を σ_{XY}，母相関係数を ρ とする。また，n 組の無作為標本 $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ に対し，各標本平均および標本不偏分散をそれぞれ $\bar{x}$，$\bar{y}$ および s_x^2，s_y^2 とし，標本共分散および標本相関係数をそれぞれ s_{xy}，r とする。これらは各母集団パラメータの推定量である。R の推定量を $\hat{R} = \bar{y}/\bar{x}$ とするとき，以下の各問に答えよ。

〔1〕　米国のある都市における世帯人員 (X) と世帯の週当たりの食費支出（米ドル）(Y) を $n = 33$ 世帯に対して調査した。表 1 はその調査における各変量の和 $\Sigma_i x_i$，$\Sigma_i y_i$ と 2 乗和 $\Sigma_i x_i^2$，$\Sigma_i y_i^2$，および積和 $\Sigma_i x_i y_i$ である。表 1 より，世帯人員と食費支出の標本平均 $\bar{x}$，$\bar{y}$，標本不偏分散 s_x^2，s_y^2，標本共分散 s_{xy}，標本相関係数 r および比 $\hat{R} = \bar{y}/\bar{x}$ の値をそれぞれ求めよ。

表 1：週当たりの世帯人員と食費支出（米ドル）$(n = 33)$

	世帯人員	食費支出
和	123	907.2
2 乗和	533	28224.0
積和	3595.5	

出典：Cochran, W. G. (1977) *Sampling Techniques, Third Edition*. John Wiley & Sons

以下では，サンプルサイズ n は十分大きいとする。

〔2〕　推定量 $\hat{R} = \bar{y}/\bar{x}$ の分散をデルタ法により求めると

$$V[\hat{R}] \approx \frac{1}{n\mu_X^2} E[(Y - RX)^2]$$

となることを示せ。

〔3〕　X および Y の変動係数をそれぞれ $\mathrm{cv}(X) = \sigma_X/\mu_X$，$\mathrm{cv}(Y) = \sigma_Y/\mu_Y$ とする。μ_X が既知のとき，μ_Y の比推定量 $\hat{\mu}_Y = \hat{R}\mu_X$ の分散は

$$V[\hat{\mu}_Y] \approx \frac{\mu_Y^2}{n}\{\mathrm{cv}(X)^2 + \mathrm{cv}(Y)^2 - 2\rho\cdot\mathrm{cv}(X)\cdot\mathrm{cv}(Y)\}$$

となることを示せ。

〔4〕　X の平均 μ_X は既知とする。このとき，比 $R = \mu_Y/\mu_X$ の推定量として，(a) 常に $\bar{y}/\mu_X$ を用いる，(b) 母集団パラメータの値により $\bar{y}/\mu_X$ もしくは $\bar{y}/\bar{x}$ を用いる，(c) 常に $\bar{y}/\bar{x}$ を用いる，のいずれを推奨するか。(b) の場合には選択の条件を示せ。また，上問〔1〕の表 1 で仮に μ_X が既知の場合はどうすればよいか。

問 2 2 割の人が富の 8 割を持つ，あるいは 2 割の人が 8 割の売り上げを稼ぐといった格差あるいは不平等度を示す現象は多くの分野で見られ「80 : 20 の法則」とも表現される。この種の現象を表す確率分布としてパレート分布 (Pareto distribution) がある。

パレート分布は正の値を取る連続的な確率変数 X の分布で，その確率密度関数は，a と b を正のパラメータとして，$x > b$ の範囲で

$$f(x) = \frac{ab^a}{x^{a+1}} \tag{1}$$

で与えられる。このとき，$X \sim Pareto(a, b)$ と表す。以下の各問に答えよ。

〔1〕 $X \sim Pareto(a, b)$ のとき，期待値 $E[X]$ を求めよ。また，累積分布関数 $F(x)$ を求め，それに基づき中央値 m を求めよ。

〔2〕 $X \sim Pareto(a, b)$ のとき，c を b よりも大きい値とし，$X > c$ である条件付き確率密度関数 $f(x|x > c)$ は

$$f(x|x > c) = \frac{ac^a}{x^{a+1}} \tag{2}$$

となることを示せ。また，式 (1) と式 (2) の比較により，パレート分布の特徴的な性質について述べよ。

〔3〕 $b = 1$ のとき,「80 : 20 の法則」が成り立つとすると，a の値はいくらか。

〔4〕 ある会社の営業部員の 1 カ月当たりの契約取得金額 x（百万円）はパレート分布 $Pareto(a, b)$ に従い，パラメータの値は $b = 1$（百万円）および a は上問〔3〕で求めた値であるとする。この会社では，契約取得金額が上位 20% の営業部員は表彰される。新人営業社員の A さんが表彰されるためにはいくら以上の契約金額を取る必要があるか。またこの会社では，表彰された社員の中の上位 20%（全営業部員の上位 4%）の社員は特別表彰される。特別表彰されるためには契約取得金額 x はいくら以上でなければならないか。

問 3　日経平均株価の将来値をこれまでに利用可能な株価を用いて予測しようと考え，T 期分のデータを収集した。日々の株価の値 Y_t $(t = 1, \ldots, T)$ に対し，対数株価 $\log Y_t$ に対し 1 次の自己回帰モデル（AR(1) モデル）

$$\log Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \log Y_{t-1} + U_t \tag{1}$$

を想定した。ここで，U_t は互いに独立に $N(0, \sigma_u^2)$ に従う確率変数列である。ある T 期分のデータを用いて最小二乗法によりパラメータ α_0，α_1 を推定したところ，α_0 の推定値は 0 に近くわずかに負値，α_1 の推定値は 1 よりもわずかに小さい値であった（初期値 y_0 も観測可能であったのでそれも用いた）。以下の各問に答えよ。

なお，$N(0, \sigma_u^2)$ の確率密度関数は

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_u^2}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_u^2}\right)$$

である。

〔1〕　確率変数 U が $N(0, \sigma_u^2)$ に従うとき，定数 k に対して

$$E[\exp(kU)] = \exp\left(\frac{k^2}{2}\sigma_u^2\right)$$

であることを示せ。

〔2〕　確率変数列 $\{Y_t\}$ がマルチンゲールであるとは，任意の t に対し，Y_t の条件付き期待値が $E[Y_t | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \ldots] = Y_{t-1}$ を満足することをいう。モデル (1) に従う Y_t の系列がマルチンゲールとなるための α_0，α_1 の条件は何か。

〔3〕　確率変数列 $\{Y_t\}$ が上問〔2〕で定義したマルチンゲールであるとき，最終時点 T の値を用いて時点 $T+1$ での値 Y_{T+1} を予測するマルチンゲール予測値 $\tilde{Y}_{T+1} = Y_T$ の予測分散を求めよ。

〔4〕　観測値の T 個の組 $(y_T, y_{T-1}), \ldots, (y_1, y_0)$ から，標準的な単回帰分析のソフトウェアを用いてモデル (1) の係数 α_1 の推定値を求め，それに基づいて帰無仮説 $H_0 : \alpha_1 = 1$ の検定を行った。この方法は統計的に妥当と言えるだろうか。理由と共に示せ。

問 4　パートタイム労働者の賃金につき，ある都市で実態調査が行われた。調査項目は，各人の一日当たりの労働時間と，同じく一日当たりの賃金（単位：千円）とされた。なお，各人の一日当たりの労働時間は 5 時間，6 時間，7 時間，8 時間のいずれかであった。

統計家 A は，一日当たりの賃金 (y) を一日当たりの労働時間 (x) で予測する回帰式 $y = a + bx$ を男女ごとに求めた。表 1 は，男女別の労働時間ごとの回答人数の割合と求められた回帰式による賃金の予測値 $(\hat{y})$ である。なお，回帰の残差分散は男女とも $s_e^2 = 0.972$ であった。以下の各問に答えよ。

表 1：男女別の労働時間ごとの割合と回帰式による平均賃金の予測値

(a) 男性の労働時間と平均賃金の予測値

労働時間 (x)	5	6	7	8
割合	0.1	0.15	0.4	0.35
予測値 $(\hat{y})$	7.2	7.8	8.4	9.0

(b) 女性の労働時間と平均賃金の予測値

労働時間 (x)	5	6	7	8
割合	0.35	0.4	0.15	0.1
予測値 $(\hat{y})$	6.6	7.2	7.8	8.4

〔1〕　統計家 A が算出した回帰式 $y = a + bx$ は，男性と女性でそれぞれどのような式であったかを示せ。また，その回帰式から，同じ労働時間の男女間で平均賃金に差が見られるかどうかを述べよ。

〔2〕　統計家 B は，男性の労働時間の平均 $\bar{x}_M$ と賃金の平均 $\bar{y}_M$ および女性の労働時間の平均 $\bar{x}_F$ と賃金の平均 $\bar{y}_F$ から，男女ごとの 1 時間当たりの賃金 $\bar{y}_M/\bar{x}_M$ および $\bar{y}_F/\bar{x}_F$ を算出してそれらを比較すべきと考えた。表 1 から $\bar{x}_M$，$\bar{y}_M$，$\bar{x}_F$，$\bar{y}_F$ を求めて $\bar{y}_M/\bar{x}_M$ および $\bar{y}_F/\bar{x}_F$ を算出し，男女格差がみられるかどうか述べよ。

〔3〕　統計家 C は見方を変え，賃金 (y) から労働時間 (x) を予測する回帰式 $x = c + dy$ に基づき，同一賃金を得ている集団内で，男女間で平均労働時間に差があるかどうかに注目した。男女ごとの回帰式の定数 c および傾き d を求め，賃金 $y = 7.2$ 千円を得ている人々の平均労働時間 (x) を男女別に求めよ。その回帰式から，同じ賃金を得ている男女間で平均労働時間に差が見られるかどうかを述べよ。

〔4〕　上問〔1〕から〔3〕の結果から，このデータから言えることとして，男女間で差が見られるかどうかを述べよ。

問 5　次の令美さんと和夫さんの会話を読み，以下の各問に答えよ。

令美：　ゲームをしよう。ここに箱が 3 つあります。それぞれ箱 1，箱 2，箱 3 として，その中の 1 つに今からチョコレートを入れるからそれを当てて欲しい。ＯＫ？
和夫：　よし分かった。簡単なゲームだ。

令美さんは和夫さんに分からないように箱をランダムに等確率で 1 つ選び，その箱にチョコレートを入れてふたを閉める。

令美：　さあ，どの箱を選ぶ？
和夫：　じゃあ箱 1 にする。
令美：　箱 1 をすぐに開けるのでは面白くないから，和夫さんが選ばなかった箱を 1 つ開けます。

と言って箱 3 を開けると，中にはチョコレートがなく外れである。

令美：　さっき箱 1 を選んだけど，この段階で箱 2 にスイッチしてもいいことにしましょう。箱 2 にスイッチする？それとも箱 1 のままとする？
和夫：　開いてない箱は 2 つで，どちらかが当たりのはずだから当たる確率は 1/2 だ。箱 2 にスイッチして箱 1 が当たりだと後悔するから箱 1 のままとするよ。
令美：　了解。でも，スイッチしたほうが当たりの確率は 2 倍になるんだけど。
和夫：　？ ？ ？

〔1〕　一般に，標本空間 Ω が互いに排反な m 個の事象 $A_1, \ldots, A_m$ に分割されているとする。すなわち，$A_1 \cup \cdots \cup A_m = \Omega$ で，$j \neq k$ のとき $A_j \cap A_k = \emptyset$ である（$\emptyset$ は空集合）。各事象の生起確率がすべて等しく $P(A_1) = \cdots = P(A_m) = 1/m$ であるとき，$P(B) > 0$ である事象 B に対し，条件付き確率 $P(A_j \mid B)$ は $P(B \mid A_j)$ に比例すること，すなわち，c を比例定数として $P(A_j \mid B) = cP(B \mid A_j)$ $(j = 1, \ldots, m)$ となることを示せ。

〔2〕　箱 2 が当たりである確率は 2/3 であることを示せ。ただし，令美さんが開ける可能性のある箱が 2 つある場合，すなわち和夫さんが選択した箱 1 が当たりであるとき，令美さんが外れの箱 2 もしくは箱 3 を開ける確率はいずれも等しいと仮定する。なお，上問〔1〕の結果を用いても用いなくてもよい。

〔3〕　令美さんが開ける可能性のある箱が 2 つある場合に，令美さんが箱 3 を開ける確率を一般に w としたとき（上問〔2〕では $w = 0.5$ であった），箱 2 が当たりである確率 p を w の関数として表せ。それをもとに，箱 2 が当たりである確率の存在範囲を示せ。

上問〔2〕の設定で，箱 2 が当たりである確率は $2/3$ であるが，それが $1/2$ であると思い込んでいる和夫さんを説得するため，実験を行うことにした。箱をスイッチして当たりとなる確率を p としたとき，n 回の実験で当たりとなる回数を X とすると，X は試行回数 n，確率 p の二項分布 $B(n,p)$ に従う。検定の問題として定式化すると，帰無仮説は $H_0 : p = 1/2$ で，対立仮説は $H_1 : p = 2/3$ である。

〔4〕 X が二項分布 $B(n,p)$ に従うとして，$H_0 : p = 1/2$ を $H_1 : p = 2/3$ に対して有意水準 $\alpha = 0.05$ で検定する。このとき，H_0 の棄却域が $X \geq n-1$ となるように試行回数 n を設定したい。$P(X \geq n-1 \mid p = 1/2) \leq 0.05$ となるような最小の n の値 n_0 はいくらか。また，試行回数が n_0 のとき，この検定の検出力はいくらか。

理工学

問 1　要因を x_1，x_2 とし，応答変数を y とする実験計画を考える。ここで，x_1 は離散変量，x_2 は連続変量で，x_2 は区間 $[-L, L]$ の任意の実数値を設定できるものとする。なお，L は正の定数である。$s, t \in [0, L]$ として，表 1 の実験点を持つ実験計画を考える。

表 1：実験計画の実験点

実験番号 i	x_{i1}	x_{i2}
1	1	s
2	1	$-t$
3	-1	s
4	-1	$-t$

分析モデルとして，正規線形モデル

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2), \quad i = 1, 2, 3, 4$$

を仮定する。ここで，β_0，β_1，β_2，σ^2 は未知パラメータであり，$\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \beta_2)^T$ の最尤推定量を $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)^T$ とする。なお，上付き添え字 ^{T} はベクトルもしくは行列の転置を表す。計画行列を

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & s \\ 1 & 1 & -t \\ 1 & -1 & s \\ 1 & -1 & -t \end{pmatrix}$$

としたとき，$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T$ として，最尤推定量 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ とその分散共分散行列はそれぞれ

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (X^T X)^{-1} X^T \boldsymbol{y}, \quad V[\hat{\boldsymbol{\beta}}] = \sigma^2 (X^T X)^{-1}$$

で与えられる。以下の各問に答えよ。

なお，実験計画が D 最適であるとは $V[\hat{\boldsymbol{\beta}}]$ の行列式 $|V[\hat{\boldsymbol{\beta}}]|$ が最小となることであり，それが A 最適であるとは $V[\hat{\boldsymbol{\beta}}]$ の対角要素の和 $\mathrm{tr}(V[\hat{\boldsymbol{\beta}}])$ が最小となることである。

〔1〕　$s = t$ とする。

〔1-1〕　$\hat{\boldsymbol{\beta}}$ を y_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ と s の式で表せ。また，$V[\hat{\boldsymbol{\beta}}]$ を σ^2 と s を用いて表せ。

〔1-2〕　表 1 の実験計画が D 最適となる s を求めよ。

〔1-3〕　表 1 の実験計画が A 最適となる s を求めよ。

〔2〕　$s=1$，$L=5$ とし，t は s と等しいとは限らないとする。

〔2-1〕　表 1 の実験計画が D 最適となる t を求めよ。

〔2-2〕　表 1 の実験計画が A 最適となる t を求めよ。

問 2　品質管理において，製品や機械部品の寿命を表す確率分布にワイブル分布がある。ワイブル分布は形状母数と尺度母数を持つが，特に，形状母数が 2 で尺度母数が $\sqrt{2}\sigma$ である分布をレイリー分布 (Rayleigh distribution) という。レイリー分布に従う確率変数 X の確率密度関数は，$x \geq 0$ の範囲で，σ を正の定数として

$$f(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

である。このとき，X はパラメータ σ のレイリー分布に従うという。以下の各問に答えよ。

なお，解答に当たっては正規分布 $N(0, \sigma^2)$ の確率密度関数は

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right)$$

であることを用いてよい。

〔1〕　パラメータ σ のレイリー分布の期待値は

$$E(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$$

となることを示せ。また，中央値および最頻値はそれぞれいくらか。

〔2〕　U と V が互いに独立にそれぞれ $N(0, \sigma^2)$ に従うとき，$X = \sqrt{U^2 + V^2}$ はパラメータ σ のレイリー分布に従うことを示せ。

〔3〕　$X_1, \ldots, X_n$ をパラメータ σ のレイリー分布からの無作為標本を表す確率変数としたとき，σ の最尤推定量を求めよ。

〔4〕　ある機械部品 10 個の寿命データを取得したところ，それら 10 個の和は 26.0 で，2 乗和は 89.96 であった。これらはパラメータ σ のレイリー分布からのランダムな観測値であるとしたとき，σ の最尤推定値ならびにその 95% 信頼区間を求めよ。

問 3　ある工業製品は工場 1 あるいは工場 2 のいずれかで生産され，工場 1 の製品の市場占有率を p とする。その製品の重量は，工場 1 では $N(\mu_1, \sigma^2)$ に従い，工場 2 では $N(\mu_2, \sigma^2)$ に従っているとする。ここで，各平均 μ_1，μ_2 は未知であるが，分散 σ^2 は共通で値は既知であるとする。すなわち，市場全体でのこの製品の重量は $N(\mu_1, \sigma^2)$ と $N(\mu_2, \sigma^2)$ の混合比 p および $(1-p)$ の混合分布であり，その確率密度関数を $g(x)$ とすると，$f_1(x)$，$f_2(x)$ をそれぞれ $N(\mu_1, \sigma^2)$ および $N(\mu_2, \sigma^2)$ の確率密度関数として

$$g(x) = pf_1(x) + (1-p)f_2(x)$$

である。ここでの未知パラメータは p，μ_1，μ_2 である。以下の各問に答えよ。なお，$N(\mu, \sigma^2)$ の確率密度関数は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

である。

〔1〕　混合分布の期待値を ξ とし，分散 τ^2 とする。このとき，ξ と τ^2 を μ_1，μ_2，σ^2，p を用いて表せ。また，σ^2 とともに各期待値 μ_1 と μ_2 が与えられたとき，分散 τ^2 が最大となるのは p がいくらのときか。

〔2〕　混合分布に従う確率変数を X とし，X が工場 1 からのものである確率を $\gamma(X)$ とすると，$\gamma(X) = pf_1(X)/g(X)$ となる。このとき，

$$p = E[\gamma(X)], \quad \mu_1 = \frac{1}{p}E[\gamma(X)X], \quad \mu_2 = \frac{1}{1-p}E[\{1-\gamma(X)\}X] \qquad (1)$$

であることを示せ。ここで，期待値は混合分布に関して取るものとする。

〔3〕　重量が x の製品が工場 1 からのものである確率 $\gamma(x)$ を μ_1，μ_2，σ^2，p で表す関数

$$\gamma(x) = h(x; \mu_1, \mu_2, \sigma^2, p) \qquad (2)$$

を求めよ。ただし，σ^2 は既知定数である。

〔4〕　製品を市場からランダムに n 個収集し，それらの重量を $x_1, \ldots, x_n$ とする。このデータから，式 (1) および (2) に基づき，未知パラメータ p，μ_1，μ_2 を推定する反復計算アルゴリズムを示せ。

問 4　ある生産システムでは，部品が壊れた場合は直ちに新しい部品に交換する。部品の壊れ方は定常なポアソン過程に従うとし，1 日当たりに壊れる部品の数を Y とすると，Y はパラメータ λ のポアソン分布 $Po(\lambda)$ に従う。Y の確率関数は

$$f(y) = \frac{\lambda^y}{y!}e^{-\lambda} \quad (y = 0, 1, \ldots) \tag{1}$$

である。以下の各問に答えよ。

〔1〕　一般に，確率変数 Y の確率（密度）関数が，パラメータを θ として

$$f(y; \theta) = \exp[a(y)b(\theta) + c(\theta) + d(y)] \tag{2}$$

となるとき，Y の分布は指数型分布族に属するという。また，式 (2) の下での期待値 $E[a(Y)]$ と分散 $V[a(Y)]$ は，$b(\theta)$ および $c(\theta)$ の θ に関する 1 階微分および 2 階微分を用いて

$$E[a(Y)] = -c'(\theta) \ / \ b'(\theta), \quad V[a(Y)] = \{b''(\theta)c'(\theta) - c''(\theta)b'(\theta)\} \ / \ \{b'(\theta)\}^3 \tag{3}$$

で与えられる。

ポアソン分布 $Po(\lambda)$ は指数型分布族の一員である。$Po(\lambda)$ の確率関数 (1) を式 (2) の形に表したとき，式 (2) の $a(y)$，$b(\theta)$，$c(\theta)$，$d(y)$ を求めよ。ただし，式 (2) の θ は λ と読み替えるものとする。また，式 (3) を用いて，$Po(\lambda)$ の期待値と分散を求めよ。

〔2〕　部品が 1 つ壊れてから次に壊れるまでの時間が 1 時間以上である確率が 0.9 となるのは λ がいくらのときか。ただし，生産システムは 1 日中稼働しているものとする。

〔3〕　生産システムの 1 日当たりの部品が壊れる個数にはその日の気温 x が影響していて，気温が高いほど壊れる部品の数が多いという知見があった。そこで，$Po(\lambda)$ のパラメータ λ の対数リンク $\log(\lambda)$ に対し，第 i 日のモデルとして，気温の原点をうまく取った上で定数項が 0 の線形モデル

$$\log(\lambda_i) = \beta x_i \tag{4}$$

を想定する。n 日分の互いに独立なデータ $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ が観測されたとき，β の対数尤度関数を求め，β の最尤推定値を求める式（尤度方程式）を示せ。

〔4〕　モデル (4) のパラメータ β の最尤推定値 $\hat{\beta}$ を求めるニュートン法のアルゴリズムを示せ。

問 5　次の令美さんと和夫さんの会話を読み，以下の各問に答えよ。

令美：　ゲームをしよう。ここに箱が 3 つあります。それぞれ箱 1，箱 2，箱 3 として，その中の 1 つに今からチョコレートを入れるからそれを当てて欲しい。ＯＫ？
和夫：　よし分かった。簡単なゲームだ。

令美さんは和夫さんに分からないように箱をランダムに等確率で 1 つ選び，その箱にチョコレートを入れてふたを閉める。

令美：　さあ，どの箱を選ぶ？
和夫：　じゃあ箱 1 にする。
令美：　箱 1 をすぐに開けるのでは面白くないから，和夫さんが選ばなかった箱を 1 つ開けます。

と言って箱 3 を開けると，中にはチョコレートがなく外れである。

令美：　さっき箱 1 を選んだけど，この段階で箱 2 にスイッチしてもいいことにしましょう。箱 2 にスイッチする？それとも箱 1 のままとする？
和夫：　開いてない箱は 2 つで，どちらかが当たりのはずだから当たる確率は 1/2 だ。箱 2 にスイッチして箱 1 が当たりだと後悔するから箱 1 のままとするよ。
令美：　了解。でも，スイッチしたほうが当たりの確率は 2 倍になるんだけど。
和夫：　？？？

〔1〕　一般に，標本空間 Ω が互いに排反な m 個の事象 $A_1, \ldots, A_m$ に分割されているとする。すなわち，$A_1 \cup \cdots \cup A_m = \Omega$ で，$j \neq k$ のとき $A_j \cap A_k = \emptyset$ である（$\emptyset$ は空集合）。各事象の生起確率がすべて等しく $P(A_1) = \cdots = P(A_m) = 1/m$ であるとき，$P(B) > 0$ である事象 B に対し，条件付き確率 $P(A_j \mid B)$ は $P(B \mid A_j)$ に比例すること，すなわち，c を比例定数として $P(A_j \mid B) = cP(B \mid A_j)$ $(j = 1, \ldots, m)$ となることを示せ。

〔2〕　箱 2 が当たりである確率は 2/3 であることを示せ。ただし，令美さんが開ける可能性のある箱が 2 つある場合，すなわち和夫さんが選択した箱 1 が当たりであるとき，令美さんが外れの箱 2 もしくは箱 3 を開ける確率はいずれも等しいと仮定する。なお，上問〔1〕の結果を用いても用いなくてもよい。

〔3〕　令美さんが開ける可能性のある箱が 2 つある場合に，令美さんが箱 3 を開ける確率を一般に w としたとき（上問〔2〕では $w = 0.5$ であった），箱 2 が当たりである確率 p を w の関数として表せ。それをもとに，箱 2 が当たりである確率の存在範囲を示せ。

上問〔2〕の設定で，箱 2 が当たりである確率は 2/3 であるが，それが 1/2 であると思い込んでいる和夫さんを説得するため，実験を行うことにした。箱をスイッチして当たりとなる確率を p としたとき，n 回の実験で当たりとなる回数を X とすると，X は試行回数 n，確率 p の二項分布 $B(n,p)$ に従う。検定の問題として定式化すると，帰無仮説は $H_0 : p = 1/2$ で，対立仮説は $H_1 : p = 2/3$ である。

〔4〕 X が二項分布 $B(n,p)$ に従うとして，$H_0 : p = 1/2$ を $H_1 : p = 2/3$ に対して有意水準 $\alpha = 0.05$ で検定する。このとき，H_0 の棄却域が $X \geq n-1$ となるように試行回数 n を設定したい。$P(X \geq n-1 \mid p = 1/2) \leq 0.05$ となるような最小の n の値 n_0 はいくらか。また，試行回数が n_0 のとき，この検定の検出力はいくらか。

医薬生物学

問 1　ある治療法の臨床試験において，20 人の被験者を 10 人ずつランダムに試験治療群（T 群）と対照治療群（C 群）に分けて，治療効果の有無を判定した。各被験者の年齢は 50 歳，60 歳，70 歳のいずれかのみであり，年齢と各年齢での治療効果の有無を表 1 に示す。以下の各問に答えよ。

表 1：被験者 20 人の年齢と治療効果の有無

	試験治療群（T 群）			対照治療群（C 群）		
年齢（歳）	効果あり	効果なし	合計	効果あり	効果なし	合計
50	2	0	2	1	1	2
60	3	2	5	2	0	2
70	2	1	3	1	5	6
合計	7	3	10	4	6	10

〔1〕　各群の効果ありの確率を π_j $(j = T, C)$ として，ロジスティック回帰モデル（モデル 1）

$$\text{モデル 1：} \log\left(\frac{\pi_j}{1-\pi_j}\right) = \alpha + \beta X_j$$

を仮定する。ここで，X_j は治療法を表す変数（T 群：$X_T = 1$，C 群：$X_C = 0$），α と β はパラメータである。T 群の対数オッズ，C 群の対数オッズ，T 群の C 群に対するオッズ比をそれぞれモデル 1 の α と β を用いて表現せよ。

〔2〕　T 群と C 群の効果ありの人数は，互いに独立にそれぞれ二項分布に従うとする。モデル 1 の下での α と β に依存しない項を除く対数尤度関数を

$$l(\alpha, \beta) = c_1\alpha + c_2\beta + c_3 \log\{1 + \exp(\alpha)\} + c_4 \log\{1 + \exp(\alpha + \beta)\}$$

としたとき，表 1 のデータにつき，c_1，c_2，c_3，c_4 の値を求めよ。

〔3〕　年齢の影響を考慮するために，ロジスティック回帰モデル（モデル 2）

$$\text{モデル 2：} \log\left(\frac{\pi_j}{1-\pi_j}\right) = \alpha + \beta X_j + \gamma Z$$

を仮定する。ここで，Z は年齢を表す連続変数，γ はパラメータである。表 1 のデータに対して，モデル 1 とモデル 2 のパラメータを最尤法によって推定した結果を表 2 に示す。表 2 の中の (1)，(2) の値を求めよ。

表 2：モデル 1 とモデル 2 のパラメータの推定結果

	モデル 1		モデル 2	
パラメータ	推定値	標準誤差	推定値	標準誤差
α（切片）	(1)	0.65	5.6	4.42
β（治療）	(2)	0.94	1.1	1.00
γ（年齢）	-	-	-0.1	0.07
最大対数尤度	-12.84		-11.79	

〔4〕 表 2 のデータから，モデル 2 について，帰無仮説 $H_0 : \gamma = 0$，対立仮説 $H_1 : \gamma \neq 0$ を検定する尤度比カイ二乗検定統計量の値を求めよ。そして，有意水準 5%の下で，帰無仮説が棄却されるかどうかを判断せよ。

〔5〕 モデル 2 の下で効果ありの確率の予測値（予測確率）を表 3 に示す。予測確率が 0.6 以上であれば「効果あり」と判定する判定基準を考える。表 1 の各被験者の治療効果の判定結果を真の結果としたとき，この判定基準の陽性的中率と陰性的中率を求めよ。

表 3：効果ありの確率の予測値

治療 (X_j)	年齢 (Z)	人数	予測確率
1	50	2	0.846
1	60	5	0.668
1	70	3	0.423
0	50	2	0.646
0	60	2	0.401
0	70	6	0.198

問 2　単群の臨床試験を計画している。主要評価変数（以下，主要変数）はある感染症が回復するまでの時間データ（単位：日）である。n 人の被験者 $(i = 1, \ldots, n)$ の主要変数 T_i は，互いに独立にパラメータ λ の指数分布 $Exp(\lambda)$ に従うとする。$Exp(\lambda)$ の時点 t での確率密度関数 $f(t)$ および累積分布関数 $F(t)$ は，$t \geq 0$ の範囲で

$$f(t) = \lambda \exp(-\lambda t), \quad F(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$$

である。なおここでは，打ち切りは生じないものとする。以下の各問に答えよ。

〔1〕　n 人の被験者の主要変数の観測値 $(T_i = t_i\ ;\ i = 1, \ldots, n)$ に基づく λ の尤度関数を示し，λ の最尤推定量 $\hat{\lambda}$ を求めよ。

〔2〕　n 人の被験者の主要変数の観測値に関する λ のフィッシャー情報量 $I_n(\lambda)$ を求めよ。

〔3〕　パラメータ λ がある値 λ_0 よりも大きいことを示すために，帰無仮説を $H_0 : \lambda = \lambda_0$ とし，対立仮説を $H_1 : \lambda > \lambda_0$ とする仮説検定を考える。検定統計量 Z は，帰無仮説と対立仮説の下で，それぞれ次の正規分布に従うとする。

$$H_0 : Z \sim N(0, 1), \quad H_1 : Z \sim N(\mu, 1)$$

有意水準を α とし，$Z > z_\alpha$ のときに帰無仮説を棄却する。このとき，検出力が $1 - \beta$ となるような μ の値を z_α と z_β を用いて表現せよ。ここで，z_α と z_β はそれぞれ $N(0, 1)$ の上側 $100\alpha\%$ 点および $100\beta\%$ 点である。

〔4〕　パラメータ λ の最尤推定量 $\hat{\lambda}$ は漸近的に平均 λ，分散 $I_n(\lambda)^{-1}$ の正規分布に従うとして，検定統計量を

$$Z = \frac{\hat{\lambda} - \lambda_0}{\sqrt{I_n(\hat{\lambda})^{-1}}} \tag{1}$$

とする。上問〔3〕の条件の下で，λ の見積り値を λ_1 として，$E[\hat{\lambda}] = \lambda_1$ とする。さらに，検定統計量 (1) の分母のフィッシャー情報量について，$I_n(\hat{\lambda}) = I_n(\lambda_1)$ であるとする。このとき，検出力 $1 - \beta$ を満たすために必要な被験者数 n を λ_0，λ_1，z_α，z_β を用いて表せ。

〔5〕　上問〔4〕の設定において，主要変数の $t = 5$ 時点での累積分布関数の値（感染症の回復率）が，帰無仮説および対立仮説の下でそれぞれ 0.5 および 0.75 であるとする。有意水準を 2.5%としたときに，検出力 80%以上を満たす最小の被験者数 n を求めよ。

問 3　ある高脂血症治療薬の製造販売後調査で筋肉関連の有害事象が問題になった。そこで，治療薬とプラセボを比較したランダム化臨床試験の結果を収集して，表 1 のように結果を整理した。

表 1：4 つの臨床試験の結果

	治療薬群		プラセボ群		Y_k
試験名	有害事象数	人数	有害事象数	人数	対数オッズ比
VEGA	26	1526	20	1520	0.262
DENEB	21	1991	15	1985	0.336
ALTAIR	26	1406	20	1400	0.262
SIRIUS	15	1215	30	1230	−0.693

一般に，調査した臨床試験数を K とし，第 k 試験における治療薬群のプラセボに対する有害事象の発現に関する対数オッズ比を Y_k $(k = 1, \ldots, K)$ とする。そして，Y_k に対して次の変量効果モデルを仮定する。

$$Y_k = \theta_k + \varepsilon_k, \quad \theta_k \sim N(\theta, \tau^2), \quad \varepsilon_k \sim N(0, \sigma_k^2)$$

ここで，θ_k は第 k 試験の真の対数オッズ比とする。各試験における分散 σ_k^2 は既知とし，その逆数を $w_k = 1/\sigma_k^2$ とする。また，θ_k と ε_k は互いに独立とする。以下の各問に答えよ。

なお，正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ の確率密度関数は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

である。

〔1〕　対数オッズ比 θ_k は共通 $(\theta_k = \theta)$ で，したがって，その分散は $\tau^2 = 0$ であるとする。この条件の下で，Y_k が従う確率分布から θ に関する対数尤度関数 $l(\theta)$ を求めよ。

〔2〕　上問〔1〕の想定の下で，θ の対数尤度関数から最尤推定量 $(\hat{\theta})$ の式を導出せよ。さらに，推定量 $\hat{\theta}$ の期待値と分散を求めよ。

〔3〕　表 1 の各対数オッズ比の値を踏まえると，対数オッズ比 θ_k が共通であるとの仮定は適切でない可能性がある。これを定量的に評価するために，統計量

$$Q = \sum_{k=1}^{K} w_k (Y_k - \hat{\theta})^2$$

を用いる。この Q は

$$Q = \sum_{k=1}^{K} w_k (Y_k - \theta)^2 - \sum_{k=1}^{K} w_k (\hat{\theta} - \theta)^2$$

と分解できる。これを用いて，Q の期待値を導出せよ。ただし，Y_k の分散は $V[Y_k]$ と表記してよい。

〔4〕　$\tau^2 > 0$ とすると，$V[Y_k] = \tau^2 + \sigma_k^2 = \tau^2 + (1/w_k)$ となる。上問〔3〕で導出した $E[Q]$ に対し，$E[Q] = Q$ と置いて，τ^2 のモーメント法による推定量を求めよ。

〔5〕　各試験間の θ_k の異質性を定量的に評価するため，$\sigma_k^2 = \sigma^2$ の下で，上問〔4〕の τ^2 の推定量を式変形することにより $\tau^2/(\tau^2 + \sigma^2)$ の推定量を導出せよ。また，表 1 のデータおよびある σ^2 の値から $Q = 7.15$ が得られた。このときの $\tau^2/(\tau^2 + \sigma^2)$ の推定値を求めよ。

問 4　N 人の被験者から，0 週（ベースライン），4 週，8 週の各時点で連続量のデータを測定し，被験者 i の測定値を Y_{i0}，Y_{i4}，Y_{i8} $(i = 1, \ldots, N)$ と表記する。そして，$\boldsymbol{Y}_i = (Y_{i0}, Y_{i4}, Y_{i8})^T$ は，互いに独立に，平均ベクトル $\boldsymbol{\mu} = (\mu_0, \mu_4, \mu_8)^T$，分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ の 3 変量正規分布に従うとする。ここで ^{T} はベクトルもしくは行列の転置を表す。以下の各問に答えよ。

〔1〕　平均ベクトル $\boldsymbol{\mu}$ の各成分の最尤推定量 $\hat{\mu}_t = (1/N)\sum_{i=1}^{N} Y_{it}$ $(t = 0, 4, 8)$ の同時分布を求めよ。

〔2〕　分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ の構造として，Toeplitz と無構造を想定する。$N = 40$ 人の被験者の測定値から求めた $\boldsymbol{\mu}$ と $\boldsymbol{\Sigma}$ の最尤法による推定値を表 1 に示す。Toeplitz と無構造の下で，それぞれの赤池情報量規準 (AIC) の値を求めよ。さらに，AIC の値から，どちらの分散共分散行列が適切かを述べよ。

表 1：各分散共分散行列の構造の下での $\boldsymbol{\mu}$ と $\boldsymbol{\Sigma}$ の推定値と最大対数尤度

	$\boldsymbol{\Sigma}$	$\boldsymbol{\mu}$ の推定値	$\boldsymbol{\Sigma}$ の推定値	最大対数尤度
Toeplitz	$\begin{pmatrix} \sigma_0 & \sigma_1 & \sigma_2 \\ \sigma_1 & \sigma_0 & \sigma_1 \\ \sigma_2 & \sigma_1 & \sigma_0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5.18 \\ 5.61 \\ 5.72 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.56 & 1.54 & 1.48 \\ 1.54 & 2.56 & 1.54 \\ 1.48 & 1.54 & 2.56 \end{pmatrix}$	-206.42
無構造	$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5.18 \\ 5.61 \\ 5.72 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.22 & 1.33 & 1.36 \\ 1.33 & 2.90 & 1.88 \\ 1.36 & 1.88 & 2.59 \end{pmatrix}$	-204.87

以下では，表 1 の数値を用い，$\boldsymbol{\Sigma}$ の構造は Toeplitz として解答せよ。

〔3〕　測定値 Y_{i0}，Y_{i4}，Y_{i8} の相関行列 R の推定値を求めよ。

〔4〕　8 週時点の値のベースラインからの変化量の平均値とその標準誤差を求めよ。

〔5〕　帰無仮説 $H_0 : \mu_0 = \mu_8$ を有意水準 5%の両側 Z 検定により検定せよ。

問 5　次の令美さんと和夫さんの会話を読み，以下の各問に答えよ。

令美：　ゲームをしよう。ここに箱が 3 つあります。それぞれ箱 1，箱 2，箱 3 として，その中の 1 つに今からチョコレートを入れるからそれを当てて欲しい。ＯＫ？
和夫：　よし分かった。簡単なゲームだ。

令美さんは和夫さんに分からないように箱をランダムに等確率で 1 つ選び，その箱にチョコレートを入れてふたを閉める。

令美：　さあ，どの箱を選ぶ？
和夫：　じゃあ箱 1 にする。
令美：　箱 1 をすぐに開けるのでは面白くないから，和夫さんが選ばなかった箱を 1 つ開けます。

と言って箱 3 を開けると，中にはチョコレートがなく外れである。

令美：　さっき箱 1 を選んだけど，この段階で箱 2 にスイッチしてもいいことにしましょう。箱 2 にスイッチする？それとも箱 1 のままとする？
和夫：　開いてない箱は 2 つで，どちらかが当たりのはずだから当たる確率は 1/2 だ。箱 2 にスイッチして箱 1 が当たりだと後悔するから箱 1 のままとするよ。
令美：　了解。でも，スイッチしたほうが当たりの確率は 2 倍になるんだけど。
和夫：　？ ？ ？

〔1〕　一般に，標本空間 Ω が互いに排反な m 個の事象 $A_1, \ldots, A_m$ に分割されているとする。すなわち，$A_1 \cup \cdots \cup A_m = \Omega$ で，$j \neq k$ のとき $A_j \cap A_k = \emptyset$ である（$\emptyset$ は空集合）。各事象の生起確率がすべて等しく $P(A_1) = \cdots = P(A_m) = 1/m$ であるとき，$P(B) > 0$ である事象 B に対し，条件付き確率 $P(A_j \mid B)$ は $P(B \mid A_j)$ に比例すること，すなわち，c を比例定数として $P(A_j \mid B) = cP(B \mid A_j)$ $(j = 1, \ldots, m)$ となることを示せ。

〔2〕　箱 2 が当たりである確率は 2/3 であることを示せ。ただし，令美さんが開ける可能性のある箱が 2 つある場合，すなわち和夫さんが選択した箱 1 が当たりであるとき，令美さんが外れの箱 2 もしくは箱 3 を開ける確率はいずれも等しいと仮定する。なお，上問〔1〕の結果を用いても用いなくてもよい。

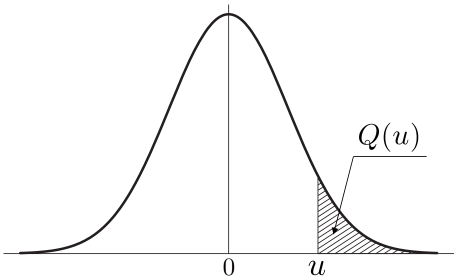
〔3〕　令美さんが開ける可能性のある箱が 2 つある場合に，令美さんが箱 3 を開ける確率を一般に w としたとき（上問〔2〕では $w = 0.5$ であった），箱 2 が当たりである確率 p を w の関数として表せ。それをもとに，箱 2 が当たりである確率の存在範囲を示せ。

上問〔2〕の設定で，箱 2 が当たりである確率は 2/3 であるが，それが 1/2 であると思い込んでいる和夫さんを説得するため，実験を行うことにした。箱をスイッチして当たりとなる確率を p としたとき，n 回の実験で当たりとなる回数を X とすると，X は試行回数 n，確率 p の二項分布 $B(n,p)$ に従う。検定の問題として定式化すると，帰無仮説は $H_0 : p = 1/2$ で，対立仮説は $H_1 : p = 2/3$ である。

〔4〕　X が二項分布 $B(n,p)$ に従うとして，$H_0 : p = 1/2$ を $H_1 : p = 2/3$ に対して有意水準 $\alpha = 0.05$ で検定する。このとき，H_0 の棄却域が $X \geq n-1$ となるように試行回数 n を設定したい。$P(X \geq n-1 \mid p = 1/2) \leq 0.05$ となるような最小の n の値 n_0 はいくらか。また，試行回数が n_0 のとき，この検定の検出力はいくらか。

付　表

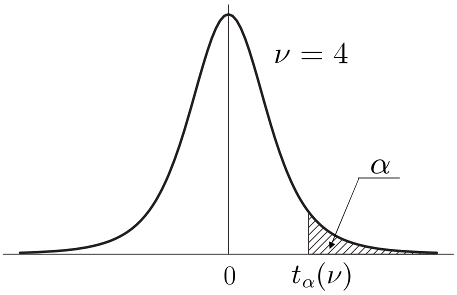
付表 1. 標準正規分布の上側確率



u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
3.6	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
3.7	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
3.8	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
3.9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

$u = 0.00 \sim 3.99$ に対する，正規分布の上側確率 $Q(u)$ を与える。
例：$u = 1.96$ に対しては，左の見出し 1.9 と上の見出し .06 との交差点で，$Q(u) = .0250$ と読む。表にない u に対しては適宜補間すること。

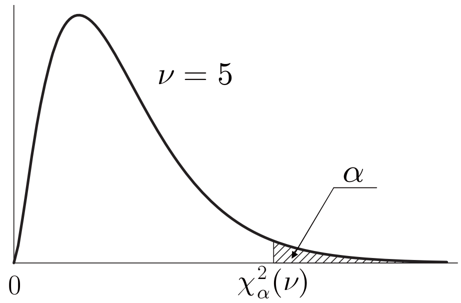
付表 2. t 分布のパーセント点



ν	α = 0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
240	1.285	1.651	1.970	2.342	2.596
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

自由度 ν の t 分布の上側確率 α に対する t の値を $t_\alpha(\nu)$ で表す。
例：自由度 $\nu = 20$ の上側 5%点 $(\alpha = 0.05)$ は，$t_{0.05}(20) = 1.725$ である。
表にない自由度に対しては適宜補間すること。

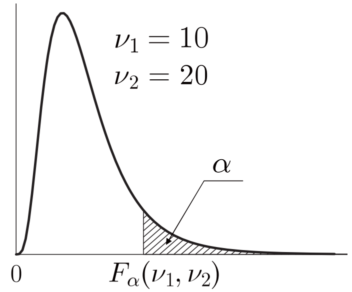
付表 3. カイ二乗分布のパーセント点



	α							
ν	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01
1	0.00	0.00	0.00	0.02	2.71	3.84	5.02	6.63
2	0.02	0.05	0.10	0.21	4.61	5.99	7.38	9.21
3	0.11	0.22	0.35	0.58	6.25	7.81	9.35	11.34
4	0.30	0.48	0.71	1.06	7.78	9.49	11.14	13.28
5	0.55	0.83	1.15	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09
6	0.87	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81
7	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48
8	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09
9	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67
10	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21
11	3.05	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.72
12	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22
13	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69
14	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14
15	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58
16	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00
17	6.41	7.56	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41
18	7.01	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81
19	7.63	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19
20	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57
25	11.52	13.12	14.61	16.47	34.38	37.65	40.65	44.31
30	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89
35	18.51	20.57	22.47	24.80	46.06	49.80	53.20	57.34
40	22.16	24.43	26.51	29.05	51.81	55.76	59.34	63.69
50	29.71	32.36	34.76	37.69	63.17	67.50	71.42	76.15
60	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38
70	45.44	48.76	51.74	55.33	85.53	90.53	95.02	100.43
80	53.54	57.15	60.39	64.28	96.58	101.88	106.63	112.33
90	61.75	65.65	69.13	73.29	107.57	113.15	118.14	124.12
100	70.06	74.22	77.93	82.36	118.50	124.34	129.56	135.81
120	86.92	91.57	95.70	100.62	140.23	146.57	152.21	158.95
140	104.03	109.14	113.66	119.03	161.83	168.61	174.65	181.84
160	121.35	126.87	131.76	137.55	183.31	190.52	196.92	204.53
180	138.82	144.74	149.97	156.15	204.70	212.30	219.04	227.06
200	156.43	162.73	168.28	174.84	226.02	233.99	241.06	249.45
240	191.99	198.98	205.14	212.39	268.47	277.14	284.80	293.89

自由度 ν のカイ二乗分布の上側確率 α に対する χ^2 の値を $\chi^2_\alpha(\nu)$ で表す。
例：自由度 $\nu = 20$ の上側 5%点 $(\alpha = 0.05)$ は，$\chi^2_{0.05}(20) = 31.41$ である。
表にない自由度に対しては適宜補間すること。

付表 4. F 分布のパーセント点



$\alpha = 0.05$

$\nu_2 \backslash \nu_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	40	60	120	∞
5	6.608	5.786	5.409	5.192	5.050	4.950	4.876	4.818	4.772	4.735	4.619	4.558	4.464	4.431	4.398	4.365
10	4.965	4.103	3.708	3.478	3.326	3.217	3.135	3.072	3.020	2.978	2.845	2.774	2.661	2.621	2.580	2.538
15	4.543	3.682	3.287	3.056	2.901	2.790	2.707	2.641	2.588	2.544	2.403	2.328	2.204	2.160	2.114	2.066
20	4.351	3.493	3.098	2.866	2.711	2.599	2.514	2.447	2.393	2.348	2.203	2.124	1.994	1.946	1.896	1.843
25	4.242	3.385	2.991	2.759	2.603	2.490	2.405	2.337	2.282	2.236	2.089	2.007	1.872	1.822	1.768	1.711
30	4.171	3.316	2.922	2.690	2.534	2.421	2.334	2.266	2.211	2.165	2.015	1.932	1.792	1.740	1.683	1.622
40	4.085	3.232	2.839	2.606	2.449	2.336	2.249	2.180	2.124	2.077	1.924	1.839	1.693	1.637	1.577	1.509
60	4.001	3.150	2.758	2.525	2.368	2.254	2.167	2.097	2.040	1.993	1.836	1.748	1.594	1.534	1.467	1.389
120	3.920	3.072	2.680	2.447	2.290	2.175	2.087	2.016	1.959	1.910	1.750	1.659	1.495	1.429	1.352	1.254

$\alpha = 0.025$

$\nu_2 \backslash \nu_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	40	60	120	∞
5	10.007	8.434	7.764	7.388	7.146	6.978	6.853	6.757	6.681	6.619	6.428	6.329	6.175	6.123	6.069	6.015
10	6.937	5.456	4.826	4.468	4.236	4.072	3.950	3.855	3.779	3.717	3.522	3.419	3.255	3.198	3.140	3.080
15	6.200	4.765	4.153	3.804	3.576	3.415	3.293	3.199	3.123	3.060	2.862	2.756	2.585	2.524	2.461	2.395
20	5.871	4.461	3.859	3.515	3.289	3.128	3.007	2.913	2.837	2.774	2.573	2.464	2.287	2.223	2.156	2.085
25	5.686	4.291	3.694	3.353	3.129	2.969	2.848	2.753	2.677	2.613	2.411	2.300	2.118	2.052	1.981	1.906
30	5.568	4.182	3.589	3.250	3.026	2.867	2.746	2.651	2.575	2.511	2.307	2.195	2.009	1.940	1.866	1.787
40	5.424	4.051	3.463	3.126	2.904	2.744	2.624	2.529	2.452	2.388	2.182	2.068	1.875	1.803	1.724	1.637
60	5.286	3.925	3.343	3.008	2.786	2.627	2.507	2.412	2.334	2.270	2.061	1.944	1.744	1.667	1.581	1.482
120	5.152	3.805	3.227	2.894	2.674	2.515	2.395	2.299	2.222	2.157	1.945	1.825	1.614	1.530	1.433	1.310

自由度 (ν_1, ν_2) の F 分布の上側確率 α に対する F の値を $F_\alpha(\nu_1, \nu_2)$ で表す。
例：自由度 $\nu_1 = 5, \nu_2 = 20$ の上側 5% 点 $(\alpha = 0.05)$ は，$F_{0.05}(5, 20) = 2.711$ である。
表にない自由度に対しては適宜補間すること。

付表 5. 指数関数と常用対数

指数関数			
x	e^x	x	e^x
0.01	1.0101	0.51	1.6653
0.02	1.0202	0.52	1.6820
0.03	1.0305	0.53	1.6989
0.04	1.0408	0.54	1.7160
0.05	1.0513	0.55	1.7333
0.06	1.0618	0.56	1.7507
0.07	1.0725	0.57	1.7683
0.08	1.0833	0.58	1.7860
0.09	1.0942	0.59	1.8040
0.10	1.1052	0.60	1.8221
0.11	1.1163	0.61	1.8404
0.12	1.1275	0.62	1.8589
0.13	1.1388	0.63	1.8776
0.14	1.1503	0.64	1.8965
0.15	1.1618	0.65	1.9155
0.16	1.1735	0.66	1.9348
0.17	1.1853	0.67	1.9542
0.18	1.1972	0.68	1.9739
0.19	1.2092	0.69	1.9937
0.20	1.2214	0.70	2.0138
0.21	1.2337	0.71	2.0340
0.22	1.2461	0.72	2.0544
0.23	1.2586	0.73	2.0751
0.24	1.2712	0.74	2.0959
0.25	1.2840	0.75	2.1170
0.26	1.2969	0.76	2.1383
0.27	1.3100	0.77	2.1598
0.28	1.3231	0.78	2.1815
0.29	1.3364	0.79	2.2034
0.30	1.3499	0.80	2.2255
0.31	1.3634	0.81	2.2479
0.32	1.3771	0.82	2.2705
0.33	1.3910	0.83	2.2933
0.34	1.4049	0.84	2.3164
0.35	1.4191	0.85	2.3396
0.36	1.4333	0.86	2.3632
0.37	1.4477	0.87	2.3869
0.38	1.4623	0.88	2.4109
0.39	1.4770	0.89	2.4351
0.40	1.4918	0.90	2.4596
0.41	1.5068	0.91	2.4843
0.42	1.5220	0.92	2.5093
0.43	1.5373	0.93	2.5345
0.44	1.5527	0.94	2.5600
0.45	1.5683	0.95	2.5857
0.46	1.5841	0.96	2.6117
0.47	1.6000	0.97	2.6379
0.48	1.6161	0.98	2.6645
0.49	1.6323	0.99	2.6912
0.50	1.6487	1.00	2.7183

常用対数			
x	$\log_{10} x$	x	$\log_{10} x$
0.1	-1.0000	5.1	0.7076
0.2	-0.6990	5.2	0.7160
0.3	-0.5229	5.3	0.7243
0.4	-0.3979	5.4	0.7324
0.5	-0.3010	5.5	0.7404
0.6	-0.2218	5.6	0.7482
0.7	-0.1549	5.7	0.7559
0.8	-0.0969	5.8	0.7634
0.9	-0.0458	5.9	0.7709
1.0	0.0000	6.0	0.7782
1.1	0.0414	6.1	0.7853
1.2	0.0792	6.2	0.7924
1.3	0.1139	6.3	0.7993
1.4	0.1461	6.4	0.8062
1.5	0.1761	6.5	0.8129
1.6	0.2041	6.6	0.8195
1.7	0.2304	6.7	0.8261
1.8	0.2553	6.8	0.8325
1.9	0.2788	6.9	0.8388
2.0	0.3010	7.0	0.8451
2.1	0.3222	7.1	0.8513
2.2	0.3424	7.2	0.8573
2.3	0.3617	7.3	0.8633
2.4	0.3802	7.4	0.8692
2.5	0.3979	7.5	0.8751
2.6	0.4150	7.6	0.8808
2.7	0.4314	7.7	0.8865
2.8	0.4472	7.8	0.8921
2.9	0.4624	7.9	0.8976
3.0	0.4771	8.0	0.9031
3.1	0.4914	8.1	0.9085
3.2	0.5051	8.2	0.9138
3.3	0.5185	8.3	0.9191
3.4	0.5315	8.4	0.9243
3.5	0.5441	8.5	0.9294
3.6	0.5563	8.6	0.9345
3.7	0.5682	8.7	0.9395
3.8	0.5798	8.8	0.9445
3.9	0.5911	8.9	0.9494
4.0	0.6021	9.0	0.9542
4.1	0.6128	9.1	0.9590
4.2	0.6232	9.2	0.9638
4.3	0.6335	9.3	0.9685
4.4	0.6435	9.4	0.9731
4.5	0.6532	9.5	0.9777
4.6	0.6628	9.6	0.9823
4.7	0.6721	9.7	0.9868
4.8	0.6812	9.8	0.9912
4.9	0.6902	9.9	0.9956
5.0	0.6990	10.0	1.0000

注: 常用対数を自然対数に直すには 2.3026 をかければよい。

【解答冊子記入例】

- 注意事項 6 ⑥：〔解答冊子各ページ先頭の記入例〕

（例）問 1 を解答する場合

受験番号 1 2 3 4 5 6 7　　問題番号 問1　　両端の余白には何も記入しないこと

- 注意事項 6 ⑦：〔解答冊子表紙選択分野・選択問題の記入例〕

（例）**社会科学** 分野の**問 1**，**問 3**，**問 4** を選択し，解答する場合

選択分野　（受験申込時に選択した分野（受験票に記載）を○で囲むこと。）

（　人文科学　社会科学　理工学　医薬生物学　）

５問から３問を選択すること。選択した問

（得点欄には何も書かないこと。）

「社会科学」を○で囲み
「問1」「問3」「問4」を○で囲む

統計応用

問題番号	問 1	問 2	問 3	問 4	問 5	合計得点

一般財団法人　統計質保証推進協会
統計検定センター

〒101-0051 東京都千代田区神田神保町３丁目６番
URL **http://www.toukei-kentei.jp**

2023.11