数理 (22) 略解

## 数理１

[1] $P(A \cap B) = 9/16$，$P(A \cap B \cap C) = 27/64$

[2] [1/2, 3/4]

[3] [1/4, 3/4]

[4] [3/8, 7/16]

## 数理２

[1] $U$，$V$ の周辺累積分布関数はそれぞれ $F_1(u) = (u+1)/2$，$F_2(v) = (v+1)/2$ となる。$U$，$V$ はそれぞれ区間 $[-1, 1]$ 上の一様分布に従う。

[2] $U$ と $V$ は互いに独立で，$(U, V)$ は正方形 $[-1, 1] \times [-1, 1]$ 上の一様分布に従う。

[3] $P(U^2 + V^2 \le 1) = \pi / 4$

[4] $P(U^2 - 2UV + V^2) = 3/4$

[5] $E[V] = 0$，$V[V] = 5/18$ で，相関係数は 1/2 である。

## 数理３

[1] $E[X] = V[X] = \lambda$

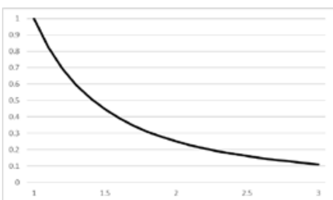
[2] $E[\Lambda] = \dfrac{\alpha}{\beta}$，$V[\Lambda] = \dfrac{\alpha}{\beta^2}$

[3] $P(X = k) = \dbinom{\alpha + k - 1}{k} \left( \dfrac{\beta}{\beta + 1} \right)^{\alpha} \left( \dfrac{1}{\beta + 1} \right)^{k}$

[4] $E[X] = \dfrac{\alpha}{\beta}$，$V[X] = \dfrac{\alpha}{\beta}\left(1 + \dfrac{1}{\beta}\right)$

[5] 推定量は $\hat{\alpha} = \dfrac{\bar{X}^2}{S^2 - \bar{X}}$，$\hat{\beta} = \dfrac{\bar{X}}{S^2 - \bar{X}}$ であり，$\hat{\alpha}, \hat{\beta} > 0$ となる条件は $S^2 - \bar{X} > 0$ である。

## 数理４



[1] $X$ の確率密度関数は，$x > 1$ の範囲で $f(x) = \dfrac{1}{\gamma} x^{-(1/\gamma)-1}$ であり，$\gamma = 1$ のときの $f(x)$ の概形は右のようである。

[2] 期待値は，$0 < \gamma < 1$ では $E[X] = \dfrac{1}{1-\gamma}$ で，$\gamma \ge 1$ では発散する。分散は，$0 < \gamma < 0.5$ では $V[X] = \dfrac{\gamma^2}{(1-2\gamma)(1-\gamma)^2}$ で，$\gamma \ge 0.5$ では発散する。

[3]　最尤推定量は $\hat{\gamma} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log X_i$ である。

[4]　$T$ はパラメータ（期待値）1 の指数分布に従う。

[5]　$E[\hat{\gamma}] = \gamma$，$V[\hat{\gamma}] = \frac{\gamma^2}{n}$。

数理５

[1]　$D_i$ は $N(\theta, 2\sigma^2)$ に従う。

[2]　$\nu = \bar{\mu} + \frac{\theta}{2}$，$b_1 = \bar{\mu} - \nu = -\frac{\theta}{2}$，$b_2 = \bar{\mu} + \theta - \nu = \frac{\theta}{2}$，$a_i = \mu_i - \nu - b_1 = \mu_i - \bar{\mu}$ $(i = 1, \ldots, n)$

[3]　(a) 適切な検定統計量は $(S_B/\phi_B)/(S_E/\phi_E)$ で，帰無分布は自由度 $(\phi_B, \phi_E)$ の $F$ 分布。
　(b) 適切な検定統計量は $(S_A/\phi_A)/(S_E/\phi_E)$ で，帰無分布は自由度 $(\phi_A, \phi_E)$ の $F$ 分布。

[4]　$\mu_1$ は未知であるため $Y_1$ から $\theta$ の情報は得られないことから，残りの $n-1$ 組のデータで検定を行えばよい。

[5]　$Y_1$ を無視することはできない。たとえば $Y_1$ が $Y_2, \ldots, Y_n$ から非常に離れた値を取った場合には $\mu_1 \neq \mu_i$ $(i = 2, \ldots, n)$ と判断するのが合理的である。